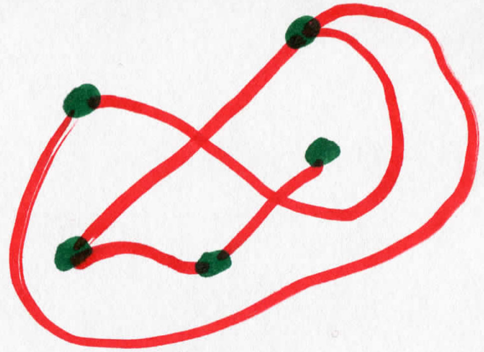
Síkgráfok



Gráf lerajzolása: csúcs — pont

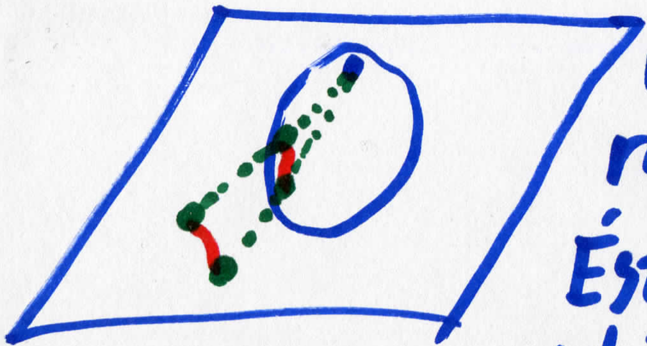
él — görbe

Síkgráf: metszés nélkül lerajzolható a síkra.

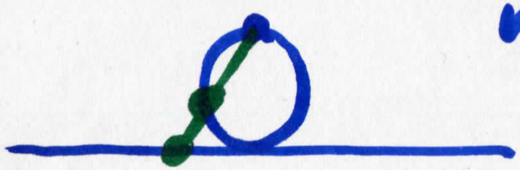
$\Updownarrow$

metszés nélkül lerajzolható a gömbre

Biz: pl. sztereografikus projekcióval



vízszintes sík, rajta a gömb, Északi Sarkból vetítünk



Ha a gömbRŐL vetítünk: Északi Sark tartománya $\longrightarrow$ végtelen tartomány

Euler formula: G egyszerű síkgráf. n: csúcsok

e: élek

t: tartományok

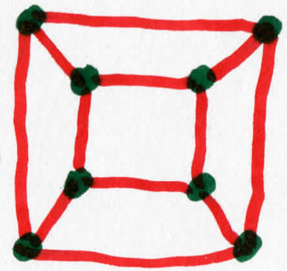
k: öf komponensek

$$\underline{n-e+t=1+k}$$

Ha G összefüggő: $k=1$

$$\underline{n-e+t=2}$$

kocka



üres gráf:

$e=0$

$t=1$

$k=n$

$n-0+1=1+n$

fa (nyilván síkgráf)

$e=n-1$

$t=1$

$k=1$

$n-(n-1)+1=1+1$

$n=8$

$e=12$

$t=6$

$k=1$

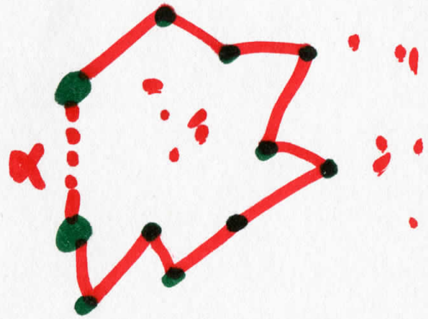
$8-12+6=1+1$

$n-e+t=1+k$

Biz: indukció e-re. $e=0$: üres gráf, láttuk ✓

Tfh G-nek e éle van, $e>0$, kevesebb élre már beláttuk.

1. G-ben van kör. α: egy él, ami benne van egy körben. Vegyük el:

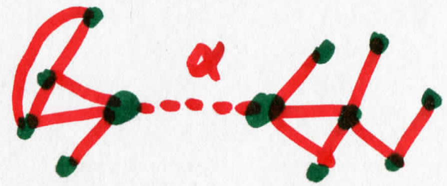


$G \to G\setminus\alpha \qquad n \to n \qquad e \to e-1 \qquad t \to t-1$

$k \to k \qquad$ ind: $n-(e-1)+(t-1)=1+k$

$$n-e+t=1+k$$

2. α: nincs benne körben: elvágó él. Vegyük el:



$G \to G\setminus\alpha \qquad n \to n \qquad e \to e-1 \qquad t \to t$

$k \to k+1 \qquad$ ind: $n-(e-1)+t=1+k+1$

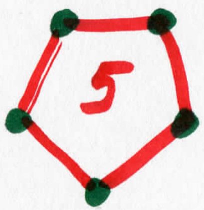
$$n-e+t=1+k$$

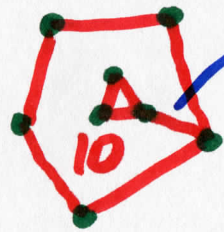
Ha G egyszerű síkgráf, akkor $e \leq 3n-6$ $(n \geq 3)$

Biz: feltehetjük, hogy G összefüggő (különben komponensenként)

Tartományok: $C_1 \; C_2 \cdots C_t$

él a határán: $c_1 \; c_2 \cdots c_t$





kétszer számoljuk

G egyszerűgráf: $\underline{c_i \geq 3}$

$3t \leq c_1 + c_2 \cdots + c_t = 2e$

$t \leq \frac{2}{3} e$

$n - e + t = 2$

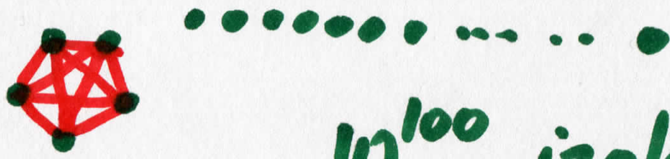
$n - e + \frac{2}{3} e \geq 2$

$-\frac{e}{3} \geq 2 - n$

$\underline{e \leq 3n-6}$

Síkgráf $\longrightarrow$ kevés él.

Vissza nem!



K_5

10^{100} izolált pont

Síkgráfra $e \le 3n-6$.

Ha $e = 3n-6 \Longrightarrow$ minden $c_i = 3$: minden tartomány 

Ha G egyszerű síkgráf és nincs benne háromszög:

$$e \le 2n-4 \qquad (n \ge 4)$$

Biz: most $\underline{c_i \ge 4}$ (nincs Δ)

$$4t \le c_1 + \dots c_t = 2e \qquad t \le \frac{e}{2}$$

$$n-e+t = 2 \qquad n-e+\frac{e}{2} \ge 2 \qquad \underline{e \le 2n-4}$$

Következmény:

Ha G egyszerű <u>páros</u> síkgráf: $\underline{e \le 2n-4}$

G egyszerű síkgráf : $\underline{d_{min} \leq 5}$

Tfh minden $d_i \geq 6$.

$6n-12 \geq 2e = \sum_1^n d_i \geq \sum_1^n 6 = 6n$ ellentmondás.

Következmény:

Minden síkgráf kiszínezhető 6 színnel. $\chi \leq 6$.

Biz: indukció n-re. $n \leq 6$: triviális.

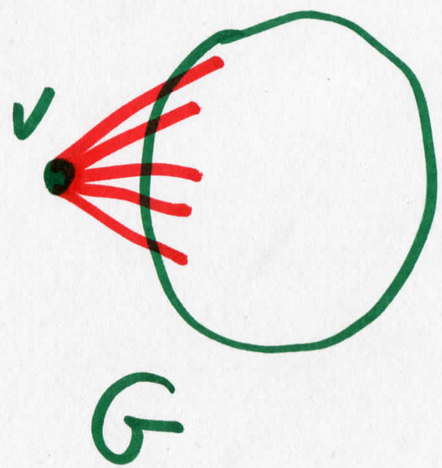
Tfh $n > 6$, kevesebbre tudjuk. G: n csúcsú

síkgráf: van v: $d(v) \leq 5$.

$G \setminus v$: kiszínezzük 6 színnel.

v vissza: max 5 tiltott szín,

valamelyik a 6-ból jó. ✓



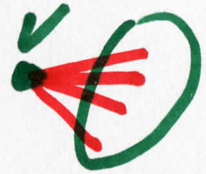
5-szín tétel: G síkgráf: $\chi(G) \le 5$

Biz: indukció n-re.

$n \le 5$: trivi. Legyen $n > 5$, kevesebbre már tudjuk.

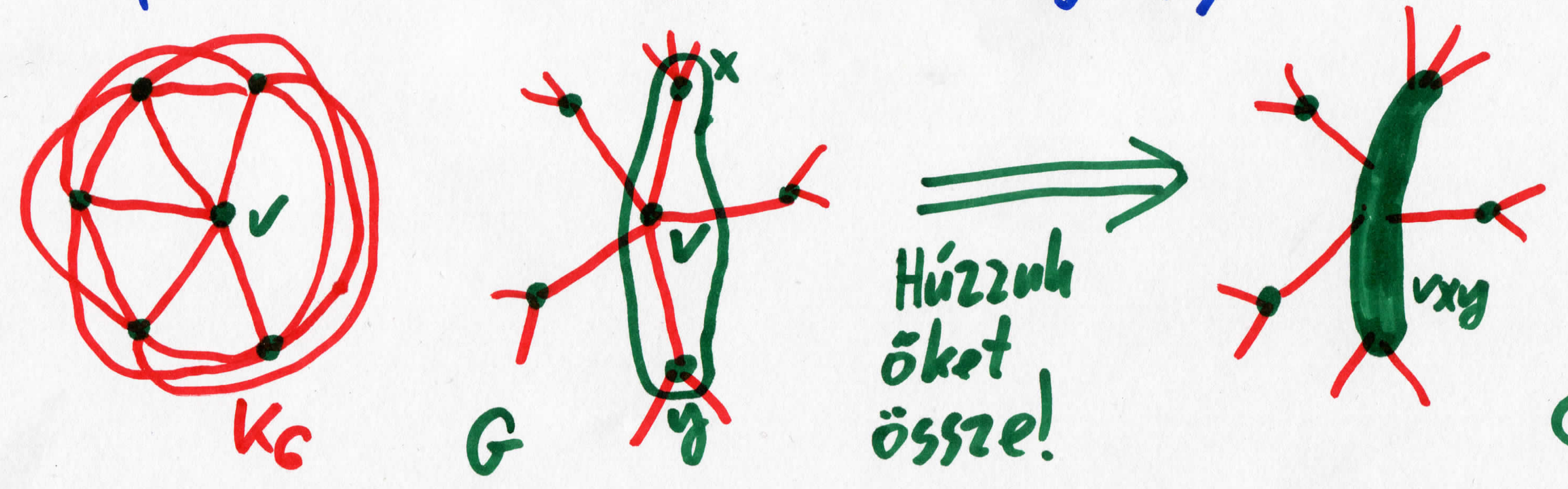
G: n csúcsú síkgráf. v: $d(v) \le 5$.

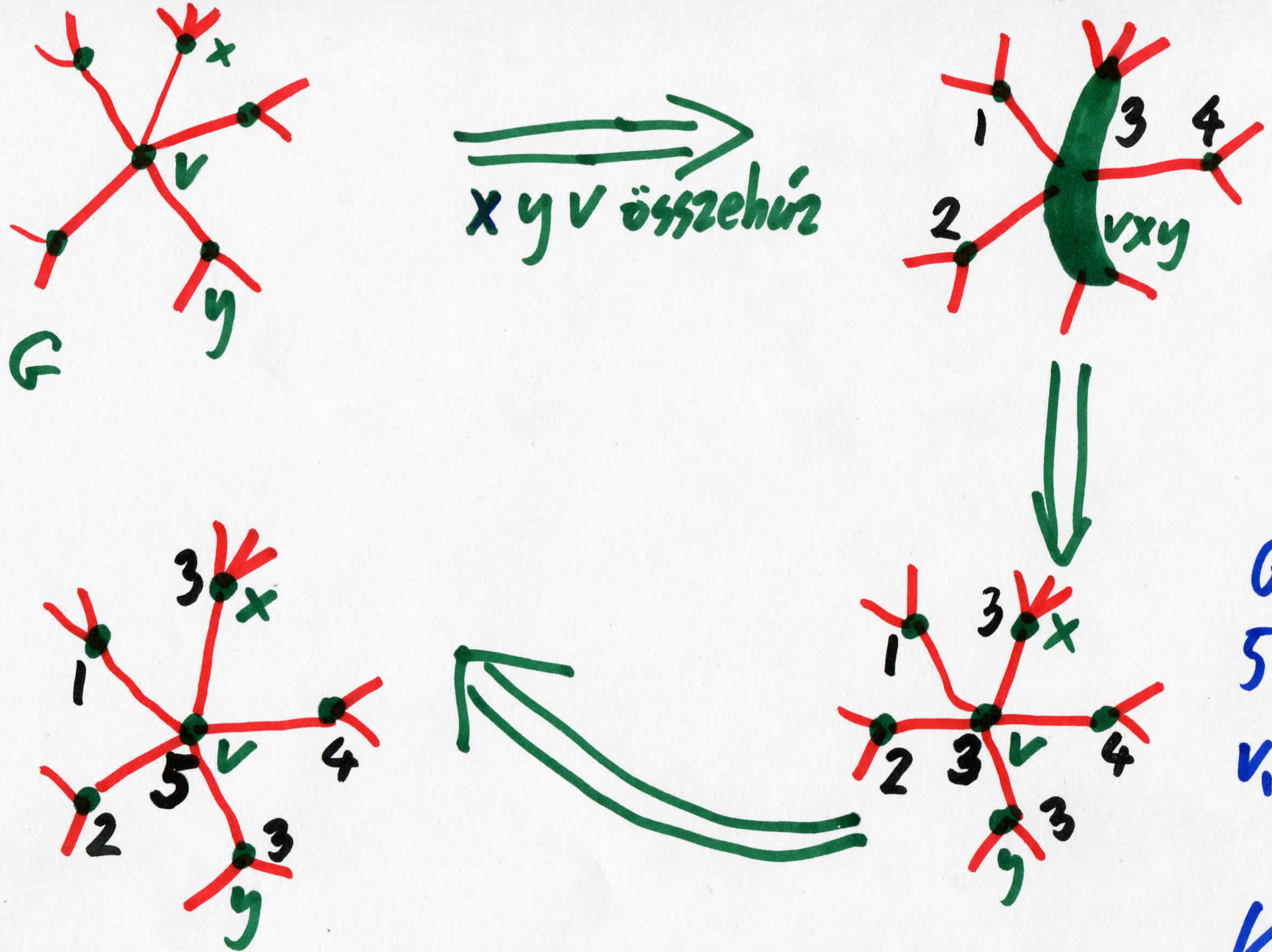
— Ha $d(v) \le 4$: mint az előbb. $G \setminus v$ 5-szín, v vissza.



— <u>Tfh $d(v) = 5$.</u>

1. Van v-nek két <u>nem szomszédos</u> szomszédja, x, y.
(különben $K_6 \subseteq G$, K_6 nem síkgráf)





G': n-2 csúcsú síkgráf.

Indukció: kiszínezhető 5 színnel.

⇓

G kiszínezve 5 színnel. **HIBA**: v, x, y egyszínűek

v-t átszínezzük. 5 szomszéd, de x, y egyszínű: 4 tiltott szín! Az 5-ből valamelyik jó lesz. **KÉSZ**

4-színtétel: G síkgráf: $\chi(G) \leq 4$.

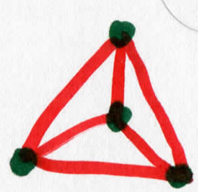
Appel-Haken 1976

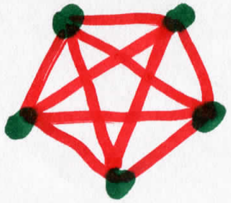
$\longrightarrow$ ~6000 eset, számítógéppel ellenőrizték.

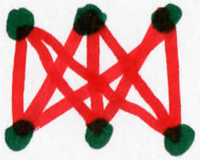
discharging method (súlyátrendező módszer)

Robertson-Seymour-Thomas-Sanders 1997

633 „egyszerű" eset

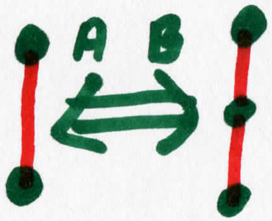
4 színre szükség lehet: 

K_5  nem síkgráf: $n=5$, $e=10$, $10 > 3\cdot 5-6 = 9$

$K_{3,3}$  nem síkgráf: PÁROS gráf, $n=6$, $e=9$

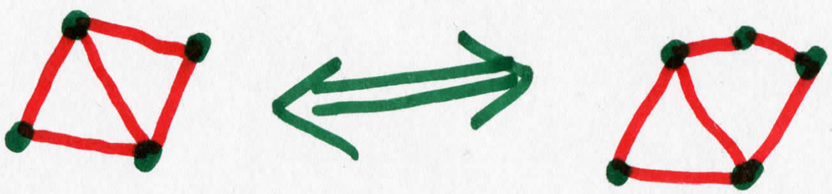
$9 > 2\cdot 6-4 = 8$

Gráf módosítás:

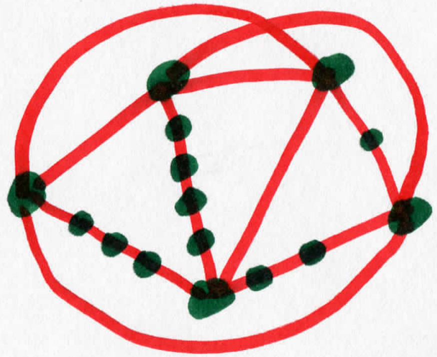


G, H topologikusan izomorfak, ha G-ből elő lehet állítani H-t az A, B lépések (többszöri) alkalmazásával.

G, H topologikusan izomorf. G síkgráf $\Longleftrightarrow$ H síkgráf



G topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal $\Longrightarrow$ nem síkgráf.

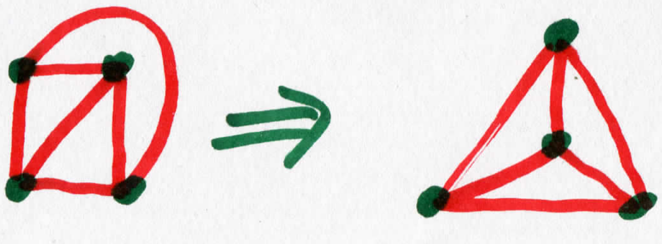


<u>Kuratowski tétel</u> 1930:

G síkgráf $\Longleftrightarrow$ nem tartalmaz K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

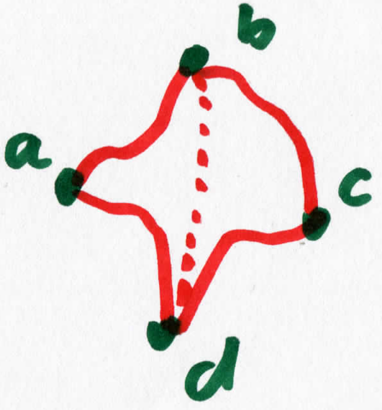
<u>Fáry-Wagner</u> (1948, 1936)

G síkgráf $\Longleftrightarrow$ kerajzolható egyenes szakasz élekkel is metszés nélkül



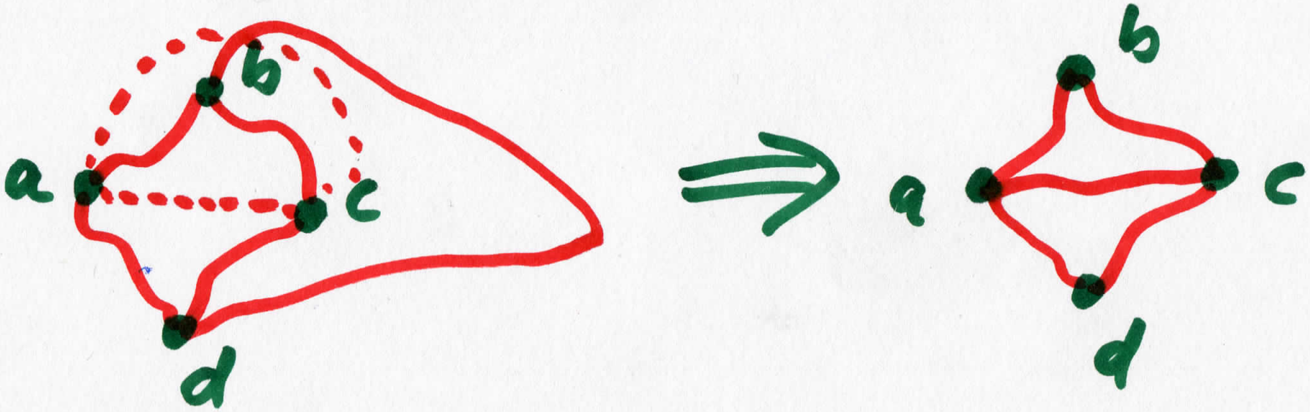
Fáry-Wagner biz.

1. Adjunk hozzá G-hez éleket úgy hogy síkgráf marad és minden tartomány háromszög. (és egyszerű gráf marad)



Ha bd él nincs G-ben: húzzuk be!

Ha már benne van: ac nincs! Húzzuk be!



$\Longrightarrow$ elég háromszögelésekre bizonyítani

indukció

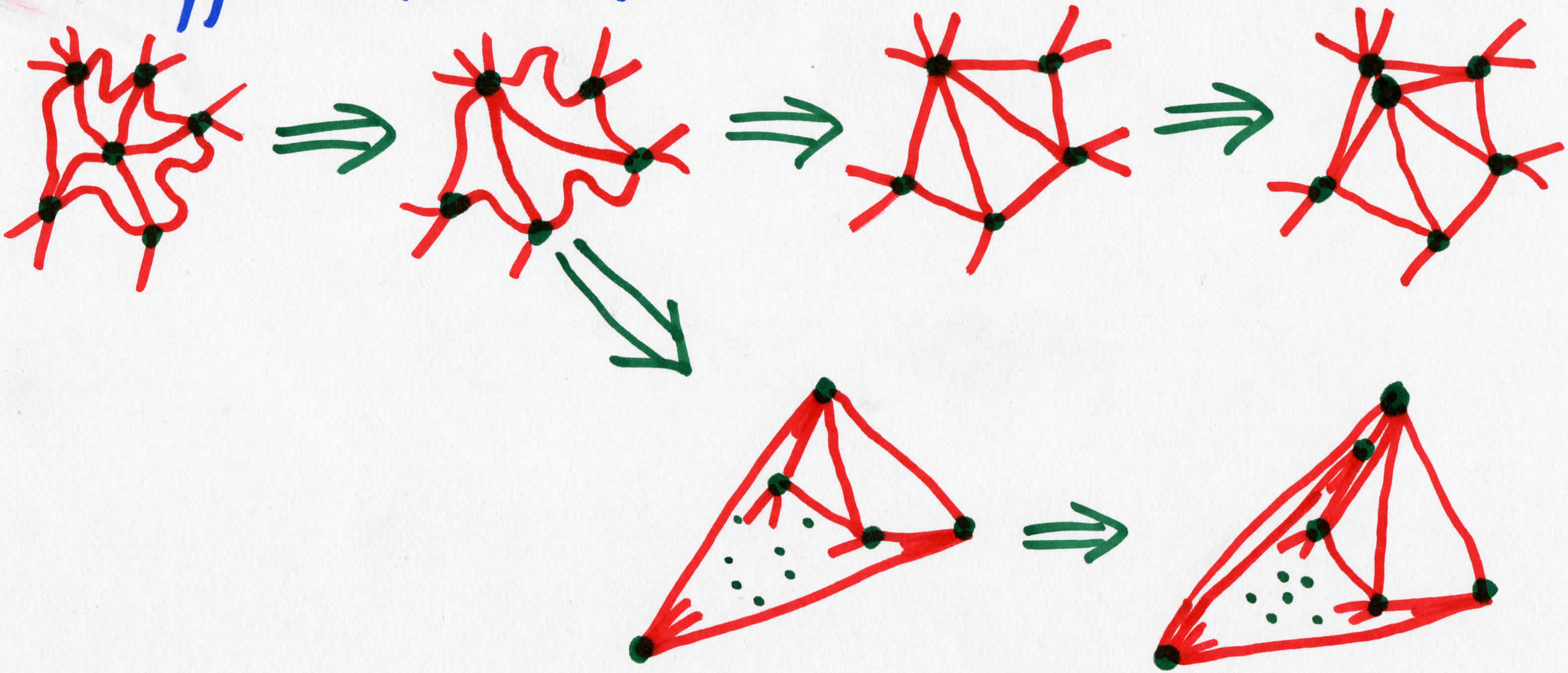
G n csúcsú háromszögelés. v: $d(v) \leq 5$ (legyen 5)

v környezete: 5 hosszú kör.

Hagyjuk el v-t, háromszögeljük a környezetét: G'.

Indukció: G' egyenes lerajzolása

Tegyük vissza v-t.



KÉSZ