Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PótZH, 2026. május 29. 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. G egy n csúcsú gráf, amelyre $\alpha(G) = 10$, $\nu(G) = 2$. Bizonyítsuk be, hogy n minimális értéke 12.

Vegyünk ket független élt G-ben. Ezeknek összesen 4 végpontja van, amelyek közül legfeljebb 2 függetlent választhatunk ki. Tehát, mivel $\alpha(G) = 10$, van még legalább 8 csúcsa a gráfnak. Ezért $n \geq 12$. 5 pont

Most tekintsünk egy 12 csúcsú gráfot, amelyben összesen 2 független él van, más él nincs. Itt természetesen $\nu(G) = 2$, és mivel a ket független él 4 végpontja közül legfeljebb 2 függetlent választhatunk ki, $\alpha(G) = 10$. Tehát n értéke lehet is 12, vagyis n minimális értéke 12. 5 pont

2. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 5$ (vagyis G-nek 25 csúcsa van). A $v_{i,j}$ és vk, l különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - k| \leq 1$ és $|j - l| \leq 1$.
Határozzuk meg a $\tau(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket.

Tulajdonképpen a gráf a következő: veszünk egy 5×5-ös sakktáblát, a mezők felelnek meg a csúcsoknak, és a király lépésre levő csúcsokat összekötjük. (Ez nem kell a megoldáshoz, de sokat segít.)

Először $\alpha(G)$-t határozzuk meg. Húzzunk be egy vizszintes egyenest a 2. és 3. sor közé, illetve a 4. és 5. sor közé. Hasonlóan, húzzunk be egy függőleges egyenest a 2. és 3. oszlop közé, illetve a 4. és 5. oszlop közé. Ezek az egyenesek 9 részre botják a sakktáblát, és világos, hogy minden részből legfeljebb csćsot választhatunk egy független halmazba. Tehát $\alpha(G) \leq 9$. 4 pont

Ugyanakkor a $v_{1,1}$, $v_{1,3}$, $v_{1,5}$, $v_{3,1}$, $v_{3,3}$, $v_{3,5}$, $v_{5,1}$, $v_{5,3}$, $v_{5,5}$ csúcsok egy független halmazt alkotnak, tehát $\alpha(G) = 9$. 4 pont

Ebből a Gallai tátal alapján $\tau(G) = 25 - 9 = 16$. 2 pont

3. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 7$ (vagyis G-nek 49 csúcsa van). A $v_{i,j}$ és vk, l különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i \neq k$ és $j \neq l$.
Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = 7$.

Ezt a gráfot megint könnyebb a sakktáblán elképzelni: vegyünk egy 7×7-es sakktáblát, a mezők felelnek meg a csúcsoknak, és a *nem* bástya lépésre levő csúcsokat összekötjük. (ez nem kell a megoldáshoz, de sokat segít.)

Vizsgáljuk meg, hogy egy színezésben hány csúcsnak lehet egyforma a színe. Ezek olyan csúcsok, amelyek közül bármely ketto egy sorban, vagy egy oszlopban van. Tegyük fel, hogy van közülük kettő egy sorban (de természetesen klönböző oszlopban). Ekkor az összes többi csúcs is ebben a sorban kell, hogy legyen. Ha pedig van ket csúcs egy oszlopban, akkor az összes többi is ebben az oszlopban van. Tehát legfeljebb 7 egyszínű csúcs lehet. 4 pont

Ebből következik, hogy legalább 7 szít kell használnunk. 2 pont

Ennyi viszont elég is, színezzünk ki minden oszlopot más színnel. Tehát $\chi(G) = 7$. 4 pont

4. A G gráf ugyanaz, mint a 3-as feladatban. Határozzuk meg $\chi'(G)$ értékét.

A szokásos módszer működik.

G-ben minden csúcs $49 - 12 - 1 = 36$ csúccsal van összekötve. Tehát a Vizing tétel alapján $\chi'(G)$ 36 vagy 37. 4 pont

Viszont ha 36 színnel ki tudnánk színezni az éleket, akkor minden csúcsban minden színt látnánk, vagyis az egyszínű élek egy teljes párosítást alkotnának. De ez nem lehet, mert G-nek 49 csúcsa van. Tehát $\chi'(G) = 37$. 6 pont

5. Határozzuk meg, hogy legkevesebb hány élt kell hozzávenni a C_{100} 100 hosszú (100 csúcsú) körhöz, hogy egy *nem* síkgráfot kapjunk.

1. megoldás. Ha csak két élt veszünk hozzá, akkor mindenképpen le lehet rajzolni metszés nélkül, lerajzoljuk a kört, es az egyik extra élt a körön beül, a másikat a körön kívül be tudjuk húzni. 5 pont

Most húzzunk be három élt úgy, hogy a végpontjaik felváltva vannak a körön (pl. v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6). Ekkor semelyik kettő sem lehet a körnek ugyanazon az oldalan, mert metszenék egymást. De mivel vak két oldala van a körnek, ebből következik, hogy a kapott gráf nem síkgráf. Tehát a válasz 3. 5 pont

2. megoldás. Ha nem síkgráfot akarunk kapni, akkor a Kuratowski tétel szerint egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy K_5-öt kell létrehoznunk. 2 pont

K_5: legyen a, b, c, d, e az 5 fő csúcs a létrehozandó topologikus K_5-ben, ebben a sorrendben a körön. Ekkor a kör ad nekünk 5 csúcspár között utat: ab, bc, cd, de, ea. Tehát még legalább 5 él kell. 2 pont

$K_{3,3}$: legyenek a két osztály fő csúcsai a, b, c illetve x, y, z. Összesen 9 csúcspár között kell utat létrehozni, és, mivel a 6 csúcs 6 ívre bontja a kört, legfeljebb 6 út van meg a körön. Tehát legalább 3 további él kell. 2 pont

Ennyi elég is, legyenek a fő csúcsok az a, x, b, y, c, z sorrendben, és húzzuk be az ay, bz, cx éleket. Ezzel éppen egy topologikus $K_{3,3}$-at kaptunk. Tehát a válasz 3. 4 pont

6. A G n csúcsú gráf úgy van lerajzolva, hogy minden élen legfeljebb egy metszés van. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb $6n - 12$ éle van.

Mivel minden él csak egy másikat metszhet, a metsző élek párokat alkotnak, egymást metszik, de más élt nem. Ezen kívül még lehetnek semmit se metsző élek. 3 pont

Minden metsző párból színezzük az egyik élt pirosra, a másikat kékre. A semmit sem metsző éleket tetszés szerint. 3 pont

Ekkor az egyforma színű élek nem metszik egymást, tehát síkgráfot alkotnak. Ezért legfeljebb $3n-6$ piros és legfeljebb $3n - 6$ kḱ él van, vagyis összesen legfeljebb $6n - 12$ él van. 4 pont