

Kombinatorika és gráfelmélet I  
**2. ZH**, 2026. május 29. 10.15-11.45  
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség:  $\tau(G)$ : lefogyó pontok minimális száma,  $\nu(G)$ : független élek maximális száma,  $\rho(G)$ : lefogyó élek minimális száma,  $\alpha(G)$ : független pontok maximális száma,  $\omega(G)$ : klikkszám,  $\chi(G)$ : kromatikus szám,  $\chi'(G)$ : élkromatikus szám,  $\kappa(G)$ : pont-összefüggőségi szám,  $\lambda(G)$ : él-összefüggőségi szám.

1.  $G$  egy  $n$  csúcsú gráf, amelyre  $\alpha(G) = 10$ ,  $\nu(G) = 2$ . Bizonyítsuk be, hogy  $n$  maximális értéke 14.

Vegyünk két független élt  $G$ -ben. Mivel nincs 3 független él, a négy végpontot elhagyva egy független ponthalmazt kapunk. Tehát  $n - 4 \leq \alpha$  vagyis  $n \leq 14$ . 5 pont

Ugyanakkor vegyünk egy 5 csúcsú teljes gráfot és további 9 független pontot. Az így kapott  $G$  gráf 14 csúcsú,  $\alpha(G) = 10$ ,  $\nu(G) = 2$ . 5 pont

Tehát  $n$  maximális értéke 14.

2.  $G$  csúcsai  $u_1, \dots, u_{15}$  és  $v_1, \dots, v_{15}$ . Az  $u_i$  és  $v_j$  csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $ij$  osztható 8-cal. Határozzuk meg a  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$ ,  $\alpha(G)$  értékeket.

Mivel  $G$  egy páros gráf, alkalmazhatjuk a két Gallai tételen kívül a két Kőnig tételt is. 1 pont

Ha  $ij$  osztható 8-cal, akkor vagy  $i$ , vagy  $j$  osztható 4-gyel. Tehát az  $u_4, u_8, u_{12}, v_4, v_8, v_{12}$  csúcsok lefogyják  $G$  összes élet, így  $\tau(G) \leq 6$ . 3 pont

Viszont 6 független élt könnyű találni, például  $u_4v_2, u_8v_6, u_{12}v_{10}, v_4u_2, v_8u_6, v_{12}u_{10}$ , tehát  $\nu(G) \geq 6$ . Viszont  $\nu(G) = \tau(G)$ , tehát  $\nu(G) = \tau(G) = 6$ . 3 pont

A Gallai tételek alapján pedig  $\alpha(G) = 30 - \tau(G) = 24$  és  $\rho(G) = 30 - \nu(G) = 24$ . (Vagy a Kőnig tételből  $\rho(G) = \alpha(G) = 24$ .) 3 pont

3.  $G$  csúcsai  $v_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $1 \leq j \leq 1945$ . (Tehát  $G$ -nek  $2 \cdot 1945$  csúcsa van.) A  $v_{ij}$  és  $v_{kl}$  különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $j = l$ , vagy  $|j - l| = 1$ , vagy  $|j - l| = 1944$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) = 5$ .

Próbáljuk meg kiszínezni az 1, 2, 3, 4 színekkel. Mondjuk  $v_{1,1}$  1-es színű,  $v_{2,1}$  2-es. Ekkor  $v_{1,2}$  és  $v_{2,2}$  3 és 4,  $v_{1,3}$  és  $v_{2,3}$  1 és 2, és így tovább, végül  $v_{1,1945}$  és  $v_{2,1945}$  1 és 2 színű, ami ellentmondás, hiszen szomszédosak  $v_{1,1}$ -gyel és  $v_{2,1}$ -gyel. 5 pont

Ugyanakkor  $G$ -ben minden pont foka 5, nem teljes gráf és nem páratlan kör, ezért a Brooks tétel alapján  $\chi(G) \leq 5$  5 pont

Tehát  $\chi(G) = 5$ .

4. Most  $G$  csúcsai  $v_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 1945$ . (Tehát  $G$ -nek  $3 \cdot 1945$  csúcsa van.) A  $v_{ij}$  és  $v_{kl}$  különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $j = l$ , vagy  $|j - l| = 1$ , vagy  $|j - l| = 1944$ . Határozzuk meg  $\chi'(G)$  értékét.

Itt minden pont foka 8 tehát  $\Delta(G) = 8$ . A Vizing tétel szerint tehát  $\chi'(G) = 8$  vagy 9. 4 pont

Ha  $\chi'(G) = 8$  lenne, akkor egy optimális színezésben minden csúcsnál mind az 8 színt látnánk, vagyis az egyfogma színű élek egy teljes párosítást alkotnának. De itt ez lehetetlen, mert összesen páratlan sok,  $1945 \cdot 3$  csúcs van. Tehát  $\chi'(G) = 9$ . 6 pont

5. A  $G$  összefüggő síkbarajzolt gráfnak minden lapja 8-szög, a nem korlátos tartomány is. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet 3-reguláris.

Legyen  $n$ ,  $e$ ,  $t$  a csúcsok, élek, tartományok száma. Tegyük fel, hogy  $G$  3-reguláris. Ekkor  $3n = 2e$  vagyis  $e = 3n/2$ . Ugyanakkor  $8t = 2e = 3n$  tehát  $t = 3n/8$ . 5 pont

Mivel  $G$  összefüggő, az Euler formula alapján  $n - e + t = 2$ , behelyettesítve  $n - 3n/2 + 3n/8 = 2$ , tehát  $-n/8 = 2$ , ami lehetetlen. Ezzel beláttuk az állítást. 5 pont

6. A  $G$  20 csúcsú gráf élei ki vannak színezve pirossal és kékkel. A piros élek síkgráfot alkotnak, a kék élek egy fát. Bizonyítsuk be, hogy  $\alpha(G) \geq 3$ .

A Négyszíntétel alapján a piros élek gráfja kiszínezhető 4 színnel. A legnagyobb színosztály legalább 5 pontból áll és nincs köztük piros él. 1 pont

A kék élek ezen az öt ponton egy erdőt alkotnak, ami páros gráf, tehát van köztük három, amelyek függetlenek, vagyis kék él sincs köztük. Ez a 3 pont független  $G$ -ben, tehát  $\alpha(G) \geq 3$ . 1 pont