

2. ZH, 2025. május 17. SZOMBAT 10.15-11.45, T 601/2.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám.

1. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{20}$, v_i és v_j össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 7$. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

Vegyük észre, hogy G páros gráf. Az egyik osztály a páros indexű, a másik a páratlan indexű csúcsok halmaza. Minden él egy páros és egy páratlan indexű csúcsot köt össze. Tehát nem csak a Gallai, hanem a König tételeket is alkalmazhatjuk. 3 pont

Meghatározzuk $\nu(G)$ -t. A $v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6, v_7v_{14}, v_8v_{15}, v_9v_{16}, v_{10}v_{17}, v_{11}v_{18}, v_{12}v_{19}, v_{13}v_{20}$ egy teljes párosítás G -ben. Vagyis $\nu(G) \geq 10$. De több nem is lehet, mert 20 csúcs van, tehát $\nu(G) = 10$. 4 pont

A König tétel alapján $\tau(G) = 10$. 1 pont

A Gallai alapján $\alpha(G) = 10$ 1 pont

Végül a König vagy Gallai alapján $\rho(G) = 10$. 1 pont

2. Egy 220 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 10. Bizonyítsuk be, hogy

a. $\alpha(G) \leq 110$,

b. $\alpha(G) \geq 20$.

a. Vegyünk egy α méretű független ponthalmazt, U -t. Legyen E az U és $V - U$ közti élek halmaza. Ekkor $|E| = 10|U| = 10\alpha$ hiszen U minden csúcsának 10 a foka és U csúcsai között nincsenek élek. 2 pont

Ugyanakkor $|E| \leq 10|V - U| = 10(220 - \alpha)$, hiszen $V - U$ minden csúcsának is 10 a foka (viszont köztük már futhat él). 2 pont

Tehát $10\alpha = |E| \leq 10(220 - \alpha)$, ebből átrendezéssel $\alpha \leq 220/2$ tehát $\alpha \leq 110$. 2 pont

b. Megint legyen U egy α méretű független ponthalmaz. Mivel U maximális, $V - U$ minden csúcsába megy él U valamelyik csúcsából. 2 pont

Viszont U -ból összesen $10|U| = 10\alpha$ él megy, tehát $10\alpha \geq |V - U| = (220 - \alpha)$, ebből átrendezéssel $\alpha \geq 220/11 = 20$. 2 pont

b. *másképp*: Nyilván a maximális fok, $\Delta(G) = 10$, tehát $\chi(G) \leq \Delta + 1 = 11$. 2 pont

Színezzük ki G -t 11 színnel és vegyük a legnagyobb színosztályt. Ez legalább $220/11 = 20$ elemű és független, tehát $\alpha \geq 20$. 2 pont

3. A G gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 2$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ *különböző* csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - k| \leq 1$ vagy $|i - k| = 6$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = 5$.

A $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}$ csúcsok egy teljes részgráfot alkotnak, tehát $\chi(G) \geq 4$. Próbáljuk kiszínezni G -t 4 színnel. Mondjuk $v_{1,1}$ és $v_{1,2}$ színe 1 és 2. Ekkor $v_{2,1}$ és $v_{2,2}$ színe ezekből különböző, mondjuk 3 és 4. Viszont akkor $v_{3,1}$ és $v_{3,2}$ színe megint 1 és 2. Így haladva azt kapjuk, hogy $v_{7,1}$ és $v_{7,2}$ színe 1 és 2. Ami ellentmondás, mert össze vannak kötve $v_{1,1}$ -gyek és $v_{1,2}$ -vel. Ezért $\chi(G) \geq 5$. 5 pont

Viszont 5 színnel kiszínezhető G :

$v_{1,1}$ és $v_{1,2}$ színe 1 és 2,
 $v_{2,1}$ és $v_{2,2}$ színe 3 és 4,
 $v_{3,1}$ és $v_{3,2}$ színe 5 és 1,
 $v_{4,1}$ és $v_{4,2}$ színe 2 és 3,
 $v_{5,1}$ és $v_{5,2}$ színe 4 és 5,
 $v_{6,1}$ és $v_{6,2}$ színe 1 és 2,
 $v_{7,1}$ és $v_{7,2}$ színe 3 és 4.

5 pont

Második rész másképp: G -ben minden csúcs foka 5, összefüggő, nem páratlan kör és nem teljes gráf, tehát alkalmazhatjuk a Brooks tételt. Ennek alapján $\chi(G) \leq 5$. Vagyis $\chi(G) = 5$. 5 pont

4. Mennyi az 1. feladatban szereplő gráf élkromatikus száma, $\chi'(G)$?

1. megoldás:

Minden csúcs foka legfeljebb 4: v_i szomszédai v_{i-7} , v_{i-3} , v_{i+7} , v_{i+3} , amennyiben ezek G csúcsai. Tehát $\chi'(G) \geq 4$. 5 pont

Viszont 4 színnel könnyen kiszínezhetők az élek: legyen $v_{i-7}v_i$ 1-es színű, ha i páros, 2-es színű, ha i páratlan, legyen $v_{i-3}v_i$ 3-as színű, ha i páros, 4-es színű, ha i páratlan. 5 pont

2. megoldás:

Mivel a maximális foksám 4 és G páros gráf, a König tétel szerint $\chi'(G) = 4$. 10 pont

5. G egy olyan egyszerű, 50 csúcsú gráf, amelyből *akárhogy* elhagyunk 10 csúcsot, a kapott gráf síkgráf.

- Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 10$.
- Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

a. Hagyjunk el tetszőleges 10 csúcsot. A kapott 40 csúcsú gráf síkgráf, tehát kiszínezhető 4 színnel a Négyszíntétel szerint. 3 pont

Most tekintsük a négy színosztály közül a legnagyobbat. Ez legalább 10 csúcs, amelyek között nincs él, tehát $\alpha(G) \geq 10$. 3 pont

Most hagyjunk el 10 független pontot G -ből (az a rész alapján ilyen van) a kapott G' gráf síkgráf. 2 pont

Tehát G' kiszínezhető 4 színnel a Négyszíntétel szerint. Tegyük vissza a 10 független pontot és színezzük ki őket egy új, ötödik színnel. Ez egy jó 5-színezése G -nek. 2 pont

6. G egy összefüggő, egyszerű, 42 csúcsú síkbarajzolt gráf. Minden lapja ötszög, a végtelen tartomány is. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet minden csúcs fokszáma 3.

Tegyük fel, hogy minden fok 3. Legyen e , t az élek, és tartományok száma (beleértve a végtelen tartományt is).

Mivel minden fok 3, $3 \cdot 42 = 126 = 2e$ tehát $e = 63$. 3 pont

Ugyanakkor mivel minden lap ötszög, $5t = 2e = 126$. 4 pont

De ez lehetetlen, hiszen 126 nem osztható 5-tel. Tehát nem lehet minden csúcs fokszáma 3. 3 pont