Kombinatorika és gráfelmélet I

1/2. PótZH, 2026. május 29. 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. Hány olyan F fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, csúcsokon, amelyre $\nu(F) \leq 2$?

A fák páros gráfok, tehát a Kőnig tétel alapján $\nu(F) = \tau(F)$, vagyis az olyan fákat keressük, amelyekre $\tau(F) \leq 2$. 3 pont

Azok az F fák, amelyekre $\tau(F) = 1$, vagyis 1 ponttal lefoghatók, éppen a csillagok, ezekből n darab van. 3 pont

Azok, amelyekre $\tau(F) = 2$, vagyis 2 ponttal foghatók le, kétfélék lehetnek: a két lefogó szomszédos, vagy másodszomszédos. Az első fajtából $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$ darab van (kiválasztjuk a két lefogót, majd minden további pont valamelyiküknek a szomszédja, de nem mind ugyanannak). A második fajtából pedig $\binom{n}{2}(n-2)(2^{n-3} - 2)$ van (kiválasztjuk a két lefogót, majd a közös szomszédjukat, végül minden további pont valamelyik lefogónak a szomszédja, de nem mind ugyanannak). 4 pont

2. A K_n teljes n csúcsú gráfban minden él súlya pozitív és rögzített, kivéve az e élt, amelynek a súlya $s(e) = x$. Minden $x > 0$ valós számra legyen $F(x)$ egy minimális feszítőfa az adott súlyozásban. Bizonyítsuk be, hogy $F(x)$ nem lehet minden $x > 0$ esetén ugyanaz a fa.

Válasszuk x-et olyan kicsi pozitív x_1 számnak, hogy kisebb, mint az összes rögzített súly. Vagyis most e súlya a legkisebb. Ekkor (a mohó algoritmust figyelembe véve) e mindenképpen benne lesz a minimális feszítőfában, $F(x_1)$-ben. 4 pont

Most pedig válasszuk x-et olyan nagy pozitív x_2 számnak, hogy nagyobb, mint az összes rögzített súly. Vagyis most e súlya a legnagyobb. Azt állítjuk, hogy ekkor e biztos, hogy nincs benne a minimális feszítőfában, $F(x_2)$-ben. Tegyük fel, hogy benne van $F(x_2)$-ben. Vegyük el. Ezzel $F(x_2)$ két komponensre esik szét. Vegyünk egy tetszőleges másik élt a két komponens között. Ha ezt az élt tesszük be $F(x_2)$-be e helyett, akkor egy kisebb súlyú feszítőfát kapunk. Tehát $F(x_2)$ nem lehetett a minimális feszítőfa. 5 pont

Ebből következik, hogy $F(x_1) \neq F(x_2)$, ezzel beláttuk az állítást. 1 pont

3. G egy 100 csúcsú (99 élű) csillag. Legkevesebb hány élt kell adni G-hez, hogy legyen Euler sétája?

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Euler sétája, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és legfeljebb 2 csúcs kivételével minden fokszám páros. 2 pont

Jelenleg a gráf összefüggő, és az is marad, ha hozzáveszünk éleket. Viszont minden csúcs foka páratlan: egynek 99, 99-nek pegig 1 a foka. 2 pont

Egy él hozzávételével két csúcsnak változik a fokszáma, tehát 98 páros fokszám eléréséhez legalább $98/2 = 49$ él szükséges. 3 pont

Ennyi viszont elég is: adjunk hozzá 49 független élt G-hez. Ezzel lesz egy 1 fokú, 98 2 fokú, és egy 99 fokú csúcs, tehát tartalmaz Euler sétát. 3 pont

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) \geq 1$ (nem feltétlenül egész). A maximális folyam nagysága $M(c) = 10$.

A $(G, s, t, c-1)$ hálózatban (minden kapacitásból levonunk 1-et) a maximális folyam nagysága $M(c-1)$.

a. Döntsük el, hogy lehet-e $M(c-1) = 8$.

b. Határozzuk meg $M(c-1)$ összes lehetséges értékét.

Ha egy (S, T) vágás k élből áll és kapacitása a (G, s, t, c) hálózatban c, akkor a $(G, s, t, c-1)$ hálózatban a kapacitása $c - k$. 2 pont

a. Legyen a (G, s, t, c) hálózat a következő. A csúcsok s, v, t. Legyen s-ből v-be 2 párhuzamos él (vagy lehetnek ezek utak is), mindkettőnek a kapacitása 5, és egy él v-ből t-be, amelynek a kapacitása 10. Két vágás van, mindkettőnek a kapacitása 10, tehát $M(c) = 10$. Ugyanakkor $(G, s, t, c-1)$-ben az sv élek kapacitása 4, a vt él kapacitása 9, tehát a két vágás kapacitása 8 illetve 9. Ezért $M(c-1) = 8$. 3 pont

b. Tekintsük (G, s, t, c)-ben a minimális (S, T) vágást, tehát $c(S, T) = 10$. Ennek a kapacitása $(G, s, t, c-1)$-ben $10 - k \leq 9$. Tehát $M(c-1) \leq 9$. 2 pont

Azt állítjuk, hogy $M(c-1)$ tetszőleges x valós szám lehet, amelyre $0 < x \leq 9$. 3 pont

Legyen $0 < x \leq 9$ rögzített. Legyen a (G, s, t, c) hálózat a következő. A csúcsok s, v, t. Legyen s-ből v-be 10 párhuzamos él (vagy lehetnek ezek utak is), mindegyiknek a kapacitása $x/10 + 1$, és egy él v-ből t-be, amelynek a kapacitása 10. Két vágás van, az egyik kapacitása $x + 10$, a másiknak 10, tehát $M(c) = 10$. Ugyanakkor $(G, s, t, c-1)$-ben az sv élek kapacitása $x/10$, a vt él kapacitása 9, tehát a két vágás kapacitása x illetve 9. Ezért $M(c-1) = x$. 4 pont

5. G-nek 6 csúcsa van és $\kappa(G) = 2$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek maximálisan 12 éle lehet.

Ha $\kappa(G) = 2$, akkor G-nek van két elvágó pontja, legyenek ezek u és v. Vagyis G összefüggő, de u-t és v-t elvéve már legalább két komponensre esik szét. 5 pont

A legtöbb él akkor lehet, ha pontosan két komponens van, ezeknek összesen 4 csúcsa van, vagyis vagy 1 és 3, vagy 2 és 2 csúcsa van a két komponensnek. Az első esetben, ha minden lehetséges élt behúzunk (minden élt behúzhatunk, ami a nem a két komponens között van), akkor 12, a második esetben 11 él van. Tehát az élek maximális száma 12. 5 pont

6. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{19}$, v_i és v_j, $i \neq j$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-j| = 1$ vagy 2. Határozzuk meg az $\alpha(G)$ és $\tau(G)$ értékeket.

Ha független pontokat szeretnénk választani, akkor bármely három szomszédos közül legfeljebb 1-et választhatunk. Tehát ha beosztjuk 6 hármasra, plusz az utolsó csúcs, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha(G) \leq 7$. 4 pont

Viszont 7 független pont ki is választható: $v_1, v_4.v_7, v_{10}, v_{13}, v_{16}, v_{19}$. 4 pont

Tehát $\alpha(G) = 7$. Viszont ekkor a Gallai tétel alapján $\tau(G) = 19 - 7 = 12$. 2 pont