

Kombinatorika és gráfelmélet I
1/1. PótZH, 2026. április 27. 10.15-11.45
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a v_1, v_2, \dots, v_n , csúcsokon, amelyben legalább $n - 3$ foksám páros?

Tehát legfeljebb 3 páratlan foksám van. Viszont tudjuk, hogy minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros (mert a foksámok összege az élek számának a duplája) ezért 0 vagy 2 páratlan foksám van. 3 pont

A fáknak mindig van legalább 2 levele (1 fokú pontja) ezért az ilyen fáknak pontosan két levele van és az összes többi foksám páros. Azok a fák, amiknek csak két levele van, az utak. (Mert ha van egy 2-nél nagyobb fokú csúcsa, akkor már leglább 3 levele lenne.) 4 pont

Egy út megfelel a csúcsok egy permutációjának, és a fordítottjának. Tehát pontosan $n!/2$ ilyen fa van. 3 pont

2. A K_n teljes n csúcsú gráfnak úgy vannak súlyozva az élei, hogy minden feszítőfája minimális feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy minden él súlya egyforma.

(Ezt a feladatot nagyon sokféleképpen meg lehet oldani. Persze a többit is, de ezt pláne!)

Tegyük fel, hogy az e és f éleknek különböző a súlya. Könnyen látható, hogy bármely két élen át van Hamilton kör. Vegyünk egy Hamilton kört, ami e -t és f -et is tartalmazza. 5 pont

Ha a Hamilton körből kihagyjuk e -t illetve f -et, akkor két feszítőfát kapunk, amiknek különböző a súlya, hiszen az egyik esetben e , a másik esetben f súlyát vontuk le a Hamilton kör súlyából. Ez ellentmondás, tehát nem lehet két különböző súlyú él. 5 pont

Tehát minden él súlya egyforma.

3. G egy 8 csúcsú gráf, két 4 hosszú kör uniója. Legkevesebb hány élt kell adni G -hez, hogy legyen Euler körsétája?

Jelenleg minden foksám 2, ami páros, viszont a gráf nem összefüggő. Tehát legalább egy élt hozzá kell venni. 3 pont

Ha egy vagy két élt veszünk hozzá, akkor lesz olyan pont, ami csak az egyik új élre csatlakozik, ennek a 3 lesz a foksáma, ezért nem lesz Euler körséta. Tehát legalább 3 élt hozzá kell venni. 3 pont

Három él viszont elég is! Legyenek az egyik kör csúcsai v_1, v_2, v_3, v_4 , a másiké u_1, u_2, u_3, u_4 , vegyük be a v_1v_3, v_3u_1, u_1v_1 éleket (vagyis egy háromszöget). Ekkor a kapott gráf összefüggő lesz és minden fok páros, tehát lesz Euler körséta. 4 pont

4. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális st folyam nagysága $M(c)$. A $(G, s, t, c+1)$ hálózatban (minden kapacitáshoz hozzáadunk 1-et) $M(c+1)$, a $(G, s, t, c+2)$ hálózatban (minden kapacitáshoz hozzáadunk 2-t) pedig $M(c+2)$.

Tudjuk, hogy $M(c) = 10$, $M(c+2) = 12$. Bizonyítsuk be, hogy $M(c+1) \leq 11$.

Vegyünk $(G, s, t, c+2)$ -ben egy 12 kapacitású (S, T) vágást (ilyen van a Ford-Fulkerson tétel alapján). Tegyük fel, hogy ez k élből áll. Ekkor ugyanennek az (S, T) vágásnak a kapacitása (G, s, t, c) -ben $12 - 2k$. 4 pont

Viszont $M(c) = 10$, tehát $12 - 2k \geq 10$, vagyis $k \leq 1$, tehát $k = 1$. Vagyis az (S, T) vágás, egy élet tartalmaz, legyen ez e . 3 pont

Ennek az e élnek a kapacitása $(G, s, t, c+2)$ -ben 12, vagyis $(G, s, t, c+1)$ -ben a kapacitása 11. Tehát van $(G, s, t, c+1)$ -ben egy 11 kapacitású vágás, ezért $M(c+1) \leq 11$. 3 pont

5. G csúcsai megfelelnek a 3 hosszú 01 sorozatoknak: $\{(a, b, c), a, b, c = 0 \text{ vagy } 1\}$. Két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha a megfelelő 01 sorozatok pontosan egy helyen tének el. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$ -t.

Vegyük észre, hogy ez a gráf a kocka élhálója. A csúcsok a kocka csúcsai, az élek a kocka élei. (Ez nem szükséges a megoldáshoz, de nagy segítség.)

Itt minden csúcs fokszáma 3, tehát $\lambda \leq 3$.

4 pont

Most vegyünk el 2 élt. Ha a felső négyzetből is legfeljebb egy élt vettünk el és az alsóból is, akkor a felső és alsó lapon is egy összefüggő gráf maradt, amelyeket összeköt legalább egy (sőt, legalább kettő) függőleges él. Ha viszont mindkét élt a felső négyzetből vettük el, akkor az alsó négyzet és a függőleges élek miatt marad összefüggő a gráf. (Ha pedig az alsóból vettük el mindkettőt, akkor ugyanúgy érvelhetünk.)

6 pont

Tehát $\lambda(G) = 3$.

6. G csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{70} , v_i és v_j , $i \neq j$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha ij osztható 14-gyel. Határozzuk meg $\tau(G)$ -t, a lefogó pontok minimális számát.

Csoportokra osztjuk a pontokat 2-es és 7-es oszthatóság szerint. A : amik 14-gyel oszthatók: $|A| = 5$. B : 7-tel osztható, 2-vel nem: $|B| = 5$. C : 2-vel osztható, 7-tel nem: $|C| = 30$. D : se 2-vel, se 7-tel nem osztható: $|D| = 30$.

A pontjai minden csúccsal össze vannak kötve, ezen kívül minden B -beli csúcs össze van kötve minden C -beli csúccsal.

2 pont

Tehát az $A \cup B$ halmaz lefogó, ezért $\tau(G) \leq 10$.

3 pont

Viszont vehetünk a BC élek közül 5 függetlent, és az AD élek közül is 5 függetlent, ez összesen 10 független él, tehát $\nu(G) \geq 10$.

3 pont

Ezeket összegezve, $10 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 10$, tehát $\tau(G) = 10$.

2 pont