

Kombinatorika és gráfelmélet I  
**1. ZH**, 2026. április 17. 10.15-11.45, E 505.  
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_6$ , csúcsokon, amelyben minden foksám páratlan?

A Prüfer kódok egyértelműen (bijektíven) megfelelnek a fáknek, tehát elég a megfelelő Prüfer kódokat leszámolni. Ez  $n - 2 = 4$  hosszú, és minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma. 1 pont

Vagyis azokat a 4 hosszú Prüfer kódokat kell leszámolni, amelyekben minden csúcs páros sokszor szerepel. 2 pont

Két esetet különböztetünk meg: 1. Egy csúcs szerepel négyszer. Ezt a csúcsot 6-féleképpen választhatjuk ki, tehát ilyen kódból 6 van. 3 pont

2. Két csúcs van a kódban, mindkettő kétszer. A két csúcsot  $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen választhatjuk ki. Ezután az egyiket  $\binom{4}{2} = 6$  helyre tehetjük a kódban. Ez már meghatározza a másik csúcs két helyét is. Tehát  $15 \cdot 6 = 90$  lehetőség van. 4 pont

Tehát a válasz 96.

2. Legyen  $x > 0$ .  $G$  egy teljes gráf a  $v_1, v_2, \dots, v_6$ , csúcsokon, a  $v_i v_j$  ( $1 \leq i < j \leq 6$ ) súlya  $x^{(j-i)}$ . Határozzuk meg  $x$  függvényében a minimális feszítőfa súlyát.

Három esetet különböztetünk meg:  $x < 1$ ,  $x = 1$ ,  $x > 1$ . Mindhárom esetben a mohó algoritmust fogjuk futtatni egy minimális feszítőfa megtalálásához. 1 pont

Legyen  $x < 1$ . Ekkor minél nagyobb  $j - i$ , annál kisebb  $x^{(j-i)}$ . Tehát a következő a mohó algoritmus egy lehetséges futása:  $v_1 v_6, v_1 v_5, v_2 v_6, v_1 v_4, v_3 v_6$ . Ennek a fának a súlya  $x^5 + 2x^4 + 2x^3$  3 pont

Legyen  $x = 1$ . Ekkor minden él súlya 1, tehát minden feszítőfa súlya 5. 3 pont

Legyen  $x > 1$ . Ekkor minél kisebb  $j - i$ , annál kisebb  $x^{(j-i)}$ . Tehát a mohó algoritmus az 1 hosszú éleket fogja kiválasztani:  $v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_5 v_6$ . Ennek a súlya  $5x$ . 3 pont

3. Legkevesebb hány élt kell hozzáadni a  $K_{50,100}$  teljes páros gráfhoz, hogy tartalmazzon Hamilton kört?

(A  $K_{50,100}$  gráfnak az egyik osztályában 50, a másikban 100 csúcsa van, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha különböző osztályban vannak.)

Legyenek a csúcsok  $v_1, \dots, v_{50}$  és  $u_1, \dots, u_{100}$ . Ha elhagyjuk a  $v_1, \dots, v_{50}$  csúcsokat, akkor a gráf 100 komponensre (izolált pontra) esik szét. Ha lenne Hamilton kör, akkor 50 csúcs elhagyásával legfeljebb 50 komponensre eshetne szét. 3 pont

Egy él hozzáadásával a komponensek számát legfeljebb eggyel tudjuk csökkenteni. Ezért legalább 50 élt hozzá kell adnunk a gráfhoz, hogy legyen benne Hamilton kör. 4 pont

Ennyi viszont elég is: adjuk hozzá a gráfhoz a következő éleket:  $v_1 v_{51}, v_2 v_{52}, \dots, v_{50} v_{100}$ . Ekkor egy Hamilton a következő:  $u_1 v_1 v_{51} u_2 v_2 v_{52} u_3 \dots u_{50} v_{50} v_{100} u_1$ . 3 pont

4. A  $(G, s, t, c)$  hálózatban semelyik él kapacitása sem 0, vagyis  $c > 0$ , a maximális  $st$  folyam nagysága pedig 100. A  $(G, s, t, c + 1)$  hálózatban (minden kapacitáshoz hozzáadunk 1-et) pedig 2026. Bizonyítsuk be, hogy a  $(G, s, t, c)$  hálózatban van olyan él, amelynek nem egész a kapacitása.

Legyen  $(S, T)$  a minimális, 100 kapacitású vágás  $(G, s, t, c)$ -ben. A Ford-Fulkerson tétel alapján ilyen létezik. Tegyük fel, hogy ebben a vágásban  $k$  darab él van. Ekkor ennek a vágásnak a kapacitása  $(G, s, t, c + 1)$ -ben  $100 + k$ , hiszen minden él kapacitása eggyel nő. 3 pont

Viszont, mivel  $(G, s, t, c + 1)$ -ben a maximális folyam 2026,  $100 + k \geq 2026$ , tehát  $k \geq 1926$ . 4 pont

Ekkor viszont  $(G, s, t, c + 1)$ -ben az  $(S, T)$  vágás legalább 1926 élt tartalmaz, amelyeknek az összkapacitása 100, tehát van köztük olyan, aminek a kapacitása kisebb mint 1, vagyis nem egész. 3 pont

5. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  ( $1 \leq i < j \leq 100$ ) akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $j = i + 1$ ,  $j = i + 3$ , vagy  $j = i + 4$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  pontösszefüggőségi száma,  $\kappa(G) = 3$ .

A  $v_1$  pont foka 3, tehát  $\kappa \leq 3$ . (Mert  $\kappa \leq d_{min} \leq 3$ , vagy mert a  $v_2, v_4, v_5$  elhagyásával  $v_1$  izolált pont lesz.) 3 pont

Most hagyjunk el 2 pontot  $G$ -ből. Ha szomszédosak, akkor a két oldal által feszített részgráf összefüggő (az 1 hosszú élek miatt) és a két oldalt összeköti egy 3 vagy 4 hosszú él. 3 pont

Ha nem szomszédosak, akkor három részre vágják a csúcshalmazt, a három rész külön összefüggő részgráfot feszít, a részeket pedig összeköti a 3 és 4 hosszú élek. Tehát 2 pont elhagyása után még összefüggő marad  $G$ , ezért  $\kappa(G) = 3$ . 4 pont

6.  $G(A, B, E)$  egy összefüggő páros gráf,  $|A| = |B|$ . Tudjuk, hogy tetszőleges  $v \in A$  csúcsot törölve  $G$ -ből (a rá illeszkedő élekkel együtt), a kapott  $G - v$  gráfban van  $A - v$ -t lefedő párosítás. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van teljes párosítás.

Bebizonyítjuk, hogy teljesülnek a Frobenius tétel feltételei. Az  $|A| = |B|$  feltétel triviálisan igaz. 1 pont

Igazolnunk kell, hogy minden  $X \subset A$  esetén  $|N(X)| \geq |X|$ . Tegyük fel először, hogy  $|X| < |A| - 1$ . Ekkor van olyan  $v \in A$ , amelyre  $v \notin X$ . A feltételek alapján a  $G - v$  gráfban van  $A - v$ -t lefedő párosítás. De ebből következik, hogy  $|N(X)| \geq |X|$ . 4 pont

Ha pedig  $X = A$ , akkor, mivel  $G$  páros gráf és összefüggő,  $N(X) = B$ , tehát  $|N(X)| = |X|$ . 4 pont

Ezzel beláttuk, hogy a Frobenius tétel feltételei teljesülnek, vagyis a Frobenius tétel szerint  $G$ -ben van teljes párosítás. 1 pont