

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2026. április 24.

Hall, Frobenius, görög betűk, König, Gallai, Tutte

Tudnivalók

Frobenius tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$ -ra $|X| \leq |N(X)|$.

Hall tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban A -t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$ -ra $|X| \leq |N(X)|$.

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

König tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. (b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

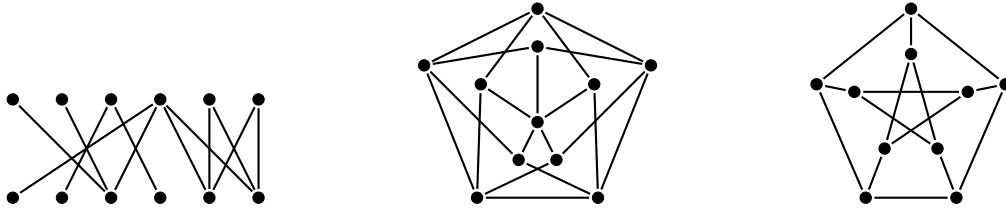
Gallai tétel: (a) Ha G -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$ -nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$ esetén.

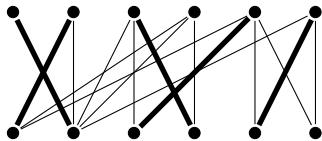
	max független	min lefogo	König, ps graf	
pont	α	$+$ τ	$=n$	Gallai nincs hurokel
el	ν	$+$ ρ	$=n$	Gallai nincs iz pont
			König ps graf, nincs iz pont	

1. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G -nek van A -t fedő párosítása.
3. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
4. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
5. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
6. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros tánccra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
9. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
10. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

11. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
12. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)
13. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
14. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



15. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j ($i \neq j$) csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.
16. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{74}\}$. A v_i és v_j ($i \neq j$) csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!
17. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
18. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
19. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



20. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.
21. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.
22. Egy 100 csúcsú egyszerű G gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van teljes párosítás.
23. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?

Házi feladat

1. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| < 7$. Határozzuk meg $\kappa(G)$ -t, G pontösszefüggőségi számát.
2. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 1, 3$, vagy 5 . Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.