Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2026. február 27.

Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Prüfer-kód

Tudnivalók:

G összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között vezet séta $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között vezet élsorozat. (pl legrövidebb ilyen élsorozat egy út)

G összefüggő és van benne kör: elhagyható egy él úgy, hogy összefüggő marad. G körmentes és nem összefüggő: hozzávehető egy él úgy, hogy körmentes marad.

Fa: olyan gráf, ami összefüggő és körmentes.

Minden összefüggő gráf tartalmaz fát. Minden körmentes gráf kibővíthető fává. Minden fában van legalább két levél (1-fokú csúcs). Minden n csúcsú fának $n-1$ éle van.

Fa: összefüggő és körmentes $\Leftrightarrow$ összefüggő és $n-1$ éle van $\Leftrightarrow$ körmentes és $n-1$ éle van.

Cayley tétel: n számozott ponton n^{n-2} különböző fa van. Bizonyítás: Legyenek a csúcsok $1, 2, \ldots, n$. Fa $\Leftrightarrow$ $n-2$ hosszú kód, minden eleme $1, \ldots n$ (Prüfer kód).

Fa $\Rightarrow$ Prüfer kód: w_1: legkisebb sorszámú levél, elhagyjuk, szomszédját felírjuk: v_1, ezt ismételjük: $v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$, ez a kibővített Prüfer kód. v_{n-1} mindig n. Ezt elhagyva: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$, a Prüfer kód.

Megfigyelés: Prüfer kódban v_i $d(v_i) - 1$-szer szerepel. Speciálisan v_i levél akkor és csak akkor, ha nem szerepel.

Prüfer kód $\Rightarrow$ fa: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$ Prüfer kód, legyen $v_{n-1} = n$, kibővített Prüfer kód: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2} n$. Megkeressük az elhagyott csúcsokat, $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$-et. Amikor v_i-t felírtuk, w_i-t hagytuk el. Rekurzívan, $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re: w_i a legkisebb index, ami nem szerepel a $w_1 w_2 \ldots w_{i-1} v_i v_{i+1} \ldots v_{n-1}$-ben. A kapott gráf élei: $v_i w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Ez egy fa lesz, aminek $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$ a Prüfer kódja.

1. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre $6, 7, 8, 9$ csúcsa van és minden csúcs foka 3.
2. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre $v = 4$, $e = 5$, ill. $v = 5$, $e = 3$, ill. $v = 5$, $e = 7$, ill. $v = 5$, $e = 8$, teljesül, ahol v jelöli a pontok számát, e pedig az élek számát!
3. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző (páronként nem izomorf) egyszerű gráf létezik?
4. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$ ill. $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7$ ill. $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges egyszerű gráf, akkor a G vagy $\overline{G}$ gráfok valamelyike összefüggő!
6. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $(n-3)$-mal egyenlő!
7. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
8. Igazoljuk, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Igazoljuk a következő állítást. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
14. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
15. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy ,,forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.

16. Igazoljuk, hogy ha egy $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:
$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots n\}$$
(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)

17. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

19. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)

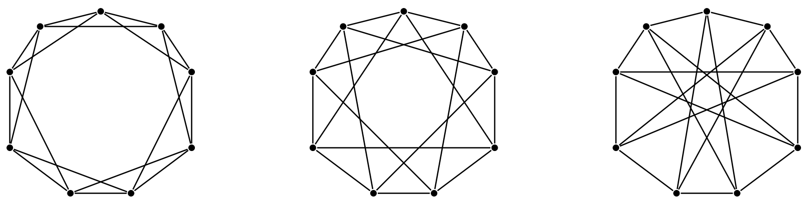
20. Egy 3×3 méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a huszárokkal a szokásos lépéseket végezve, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (Közben sosem állhat egy mezőn egynél több figura.)

21. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely n csúcsú fa, és minden éle azonos színű.

22. Adjuk meg az összes, legalább két csúcsú önkomplementer fát, vagyis az összes olyan legalább két csúcsú fát, ami izomorf a komplementerével!

23. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

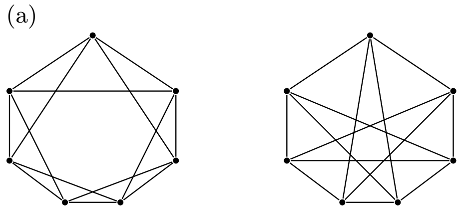
24. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



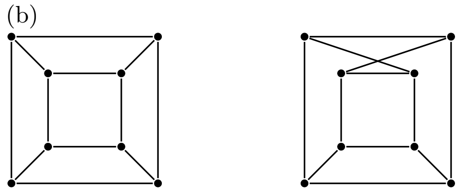
25. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.

26. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?

(a)



(b)



27. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?

28. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F-beli csúcsok maximális fokszáma.

29. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.

30. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$?

31. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?

32. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)

33. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?

34. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?

35. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \ldots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartamazza?
36. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $d_1, d_2, \ldots, d_n$ egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.
37. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.
38. Bizonyítsuk be, hogy egy fában *az összes* leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)
39. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)

Házi feladatok

1. Hány különböző fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$ csúcsokon, amelyben $d_1 + d_2 = 4$? (d_i a v_i csúcs fokszáma)
2. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon ($n \geq 3$), amelynek
   a. $v_{n-1}v_n$ éle?
   b. v_1v_2 éle?