Ismétlés, 2026 május 18.

Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Pótpót ZH, 2024. május 29, 8.15-9.45, IE 217-1.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, ventillátor, mikrohullámú sütő, porszívó, fűnyíró használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 2$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i - k| = 1$,
vagy $|i - k| = 4$.
Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

2. G egyszerű gráf, 9 csúcsa van és minden csúcs foka 4. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 3$.

3. G egyszerű gráf, 2024 csúcsa van, nincs izolált csúcsa, és $\rho(G) = 1956$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 137$.

4. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 3$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i - k| = 1$,
vagy $|i - k| = 4$.
(Vigyázat ez a gráf nem azonos az 1. feladat gráfjával!) Határozzuk meg $\chi'(G)$-t.

5. G csúcsai a 4 hosszú $0-1$ sorozatoknak felelnek meg. (Vagyis olyan 4 hosszú sorozatoknak, amelyeknek minden eleme 0 vagy 1.) Két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a két megfelelő sorozat pontosan egy helyen tér el egymástól. Bizonyítsuk be hogy G nem síkgráf.

6. A G összefüggő síkbarajzolt gráf minden lapjának 5 vagy 8 oldala van. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet pontosan 21 csúcsa.

Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Aláíráspótló ZH, 2019. május 24. 8.15-9.45, T 601/2

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G síkgráfra $\kappa(G) \leq 5$.
b. Mutassunk olyan G síkgráfot, amelyre $\kappa(G) \geq 3$.

2. G csúcsai $v_{i,j,k}$, $1 \leq i, j, k \leq 4$. A $v_{i,j,k}$ és $v_{i',j',k'}$ csúcsok össze vannak kötve, akkor és csak akkor, ha $|i - i'| + |j - j'| + |k - k'| = 1$. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\rho(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$ értékeket.

3. A H egyszerű gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van és nincs benne háromszög (három csúcs, amelyek között mind a három él be van húzva). Bizonyítsuk be, hogy $\omega(H) + \Delta(H) \leq n + 1$.

4. Határozzuk meg a 2. feladatban szereplő G gráf élkromatikus számat, $\chi'(G)$-t.

5. A K egyszerű gráfnak n csúcsa van, $n \geq 4$ és páros. K-ban akárhogyan tekintünk 3 csúcsot, a lehetséges három él közül legalább 2 be van húzva. Bizonyítsuk be, hogy K-ban van teljes párosítás.

6. A $G(V, E_1)$ gráf síkgráf, az $F(V, E_2)$ gráf pedig egy fa. Bizonyítsuk be, hogy a $H(V, E_1 \cup E_2)$ gráfra $\chi(H) \leq 8$.