Kombinatorika és gráfelmélet I

1. pótpótZH, 2022. május 24, 8.15-9.45, IE 217-1

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számológép és számítógép, mobiltelefon, tévé és rádió használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

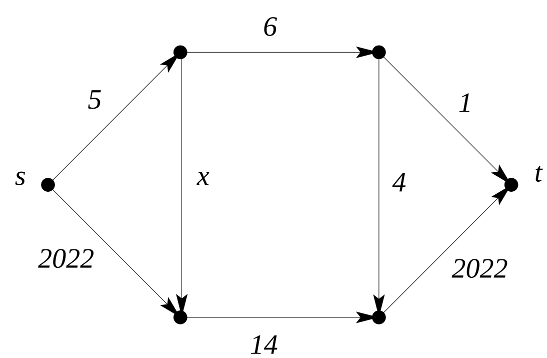
1. F egy fa a $v_1, v_2, \ldots, v_7$ csúcsokon. Maximum hány különböző fokszámú csúcsa lehet?

2. A G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$. A v_iv_j $(i \neq j)$ él súlya $1/x$, ha $i+j$ páros és x, ha $i+j$ páratlan. Adjuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa súlyát x függvényében (és bizonyítsuk be, hogy ennyi), ahol $0 < x$ tetszőleges valós szám.

3. a. G egy 2022 csúcsú egyszerű gráf, minden csúcs foka 1012. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Euler körsétája.
b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás már nem feltétlenül teljesül, ha minden csúcs foka 1010 (1012 helyett).

4. Legyen $0 \leq M \leq 100$. Mutassunk egy $G(s,t,c_1)$ és egy $G(s,t,c_2)$ hálózatot (G, s, t ugyanaz, csak a kapacitások különböznek) úgy, hogy $G(s,t,c_1)$-ben a maximális folyam nagysága 100, $G(s,t,c_2)$-ben is 100, és a $G(s,t,\min(c_1,c_2))$ hálózatban pedig M.

5. Tetszőleges $x \geq 0$ számra legyen $m(x)$ az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg az $m(x)$ függvényt.



6. A G páros gráf két osztálya A és B, A csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_{100}$, B csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$. Az u_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i \cdot j$ osztható 10-zel. Határozzuk meg $\nu(G)$-t.

Kombinatorika és gráfelmélet I

1. Pótpót ZH, 2024. május 29, 8.15-9.45, IE 217-1.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, ventillátor, mikrohullámú sütő, porszívó, fűnyíró használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. A 30 csúcsú G teljes gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 10$. A $v_{i,j}v_{k,l}$ él súlya legyen 1, ha $i = k$ és legyen 2 ha $i \neq k$. Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van G-nek?

2. Minimálisan hány éle van egy 100 csúcsú G egyszerű gráfnak, amelyben van Hamilton kör de nincs Euler séta?

3. Legyen $|V| = 100$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ két fa a V csúcshalmazon, és $G(V, E_1 \cup E_2)$ az uniójuk. Bizonyítsuk be, hogy $\kappa(G) \leq 10$.

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) > 0$ *nem feltétlenül egész.* A maximális folyam nagysága $M = 3$. A $(G, s, t, c + 1)$ (minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel) hálózatban a maximális folyam nagysága $M' = 100$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan e él a (G, s, t, c) hálózatban amelynek a kapacitása $c(e) < 1/10$.

5. Szokás szerint G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 2$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i - k| = 1$ és $j = l$,
vagy $|i - k| = 4$ és $j = l$.
Határozzuk meg élösszefüggőségi számát $\lambda(G)$-t.

6. $G(A, B, E)$ egy 100 csúcsú egyszerű páros gráf, a két osztály A és B. Minden csúcs foka 3, 4, vagy 5. Bizonyítsuk be, hogy $|A| \geq 34$.