Kombinatorika és gráfelmélet 1.

5. gyakorlat, 2025. március 14.

Hálózatok, folyamok

Tudnivalók:

Legyen G egy irányított gráf, s (forrás) és t (nyelő) két csúcsa, c pedig egy függvény, amely minden e élhez egy $c(e) \geq 0$ kapacitást rendel. Ekkor a (G, s, t, c) négyest *hálózatnak* hívjuk. Most tegyük fel, hogy f is egy függvény, amely minden e élhez egy $f(e) \geq 0$ számot rendel.

Ha $e = uv$, ahol u az e kezdőpontja, v a végpontja, akkor $f(e)$ helyett természetesen írhatunk $f(uv)$-t is.

Az f függvényt *folyamnak* hívjuk, ha a következő két feltétel teljesül:

1. Minden e élre $0 \leq f(e) \leq c(e)$.
2. Minden $v \neq s, t$ csúcsra $\sum_u f(uv) = \sum_u f(vu)$.

A másodikat Kirchoff szabálynak, vagy csomóponti szabálynak hívjuk. (Jelentése: ugyanannyi megy be, mint ki.)

Ha f folyam, akkor $m(f) = \sum_u f(su) - \sum_u f(us) = \sum_u f(ut) - \sum_u f(tu)$, $m(f)$ a folyam *nagysága.* ($m(f)$ az s-ből netto kimenő folyam, ami ugyanannyi, mint ami netto megerkezik t-be.)

Legyen $V(G) = S \cup T$, ahol $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$. Ilyenkor az (S, T) pár *vágásnak* nevezzük.

Az (S, T) vágás kapacitása $c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(uv)$. (A jó irányba menő élek kapacitásainak az összege.)
Könnyű: ha f folyam és (S, T) vágás, akkor $m(f) \leq c(S, T)$.

Ford-Fulkerson tétel: $\max_{f \text{folyam}} m(f) = \min_{(S,T) \text{vágás}} c(S, T)$.

Bizonyítás: javító utas algoritmussal. Tegyük fel, hogy van egy f folyam. G' *javító gráf*: A csúcsai ugyanazok, mint G csúcsai. Ha G-ben van egy uv él, amelynek a kapacitása $c(uv)$, a folyam rajta $f(uv)$, akkor akkor:

1. Ha $f(uv) = 0$, akkor behúzzuk G'-be az uv élt, $c(uv)$ kapacitással.
2. Ha $0 < f(uv) < c(uv)$, akkor behúzzuk G'-be az uv élt, $c(uv) - f(uv)$ kapacitással és a vu élt, $f(uv)$ kapacitással.
3. Ha $f(uv) = c(uv)$, akkor behúzzuk G'-be a vu élt, $c(uv) = f(uv)$ kapacitással.

(Tehát a G' hálózat azt modellezi, hogy milyen változtatásokhoz van jogunk.)

Ha G'-ben van út s-ből t-be, akkor ezen az úton megváltoztathatjuk (javíthatjuk) f-et. Ha pedig nincs javító út, akkor ennek az az oka, hogy f optimális. Legyen S azon csúcsok halmaza, akik elérhetők s-ből javító úton, T a többi. Ennek a kapacitása $c(S, T) = m(f)$.

G'-ben van út s-ből t-be $\Leftrightarrow$ $m(f)$ nem maximális.

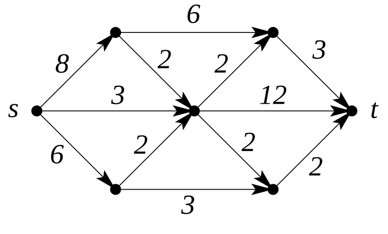
Ebből algoritmust is kaphatunk, javító utas algoritmus: induljunk ki a csupa 0 folyamból. javító gráf, ha nincs javító út, kész vagyunk. Ha van, javítunk, új folyam, új javító gráf, stb, amig véget nem ér.

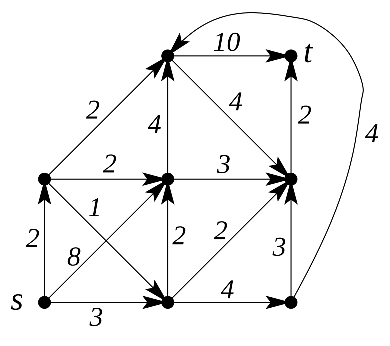
Ha minden kapacitás egész, akkor a javító utas algoritmus véget ér, megtalálja a max folyamot. Egészértékűségi Lemma: Ha minden kapacitás egész, akkor van olyan max folyam, ami minden élen egész.

Ha nem egészek a kapacitások: lehetséges, hogy a javító utas algoritmus nem ér véget, sőt, nem is a max folyamhoz konvergál.

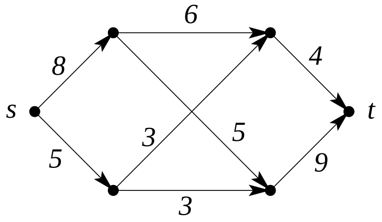
Edmonds-Karp: Ha mindig a *legrövidebb* javító úton javítunk, akkor a javító utas algoritmus (csúcsok számában) polinom időben véget ér.

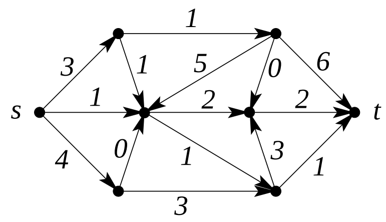
1. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.





2. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!





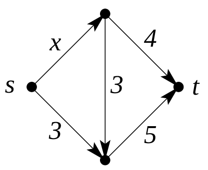
3. a) Az előző feladat hálózataiban válasszuk valamelyik él kapacitását a feltüntetett helyett c-nek, és határozzuk meg, hogyan függ a maximális folyamnagyság a c kapacitás értékétől.
b) Szintén az előző feladat hálózatait tekintve döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni ahhoz, hogy a létrejövő hálózatban a maximális folyam nagysága a lehető legkisebb legyen.

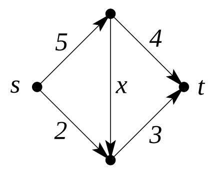
4. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, c) hálózatban az s-t tartalmazó, t-től diszjunkt X és az Y ponthalmazok mindegyike minimális kapacitású st-vágást határoz meg. Mutassuk meg, hogy az $X \cap Y$ és $X \cup Y$ ponthalmazokhoz is minimális kapacitású st-vágás tartozik.

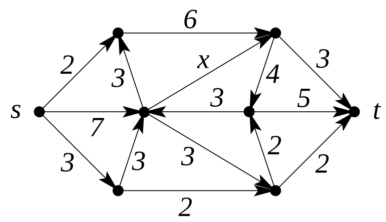
5. Igaz-e, hogy minden hálózatban van olyan e él, amelynek a kapacitását ε-nal csökkentve (ahol $0 \le \varepsilon \le c(e)$) a maximális folyamnagyság is ε-nal csökken?
Igaz-e az, hogy minden hálózatban van olyan e él amihez létezik egy pozitív ε mennyiség úgy, hogy ha e kapacitását ε-nal növeljük (ahol $0 \le \varepsilon \le c(e)$), akkor a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik?
Ha a fenti állítások valamelyike nem igaz, akkor hogyan lehet eldönteni egy adott hálózatban, hogy létezik-e olyan él, ami rendelkezik a kérdésben leírt tulajdonsággal?

6. Adott a D irányított gráf valamint D élein a c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.

7. Határozzuk meg a nemnegatív x függvényében a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!







8. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

9. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden csúcs megfelel az $A = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ halmaz egy részhalmazának. Tetszőleges $X, Y \subseteq A$ részhalmazokra legyen a megfelelő x és y csúcsok közti él (mindkét irányban) kapacitása $|X \cap Y|$. Legyen s és t az $\{1\}$ illetve $\{n\}$ részhalmazoknak megfelelő csúcs. Határozzuk meg a maximális $s - t$ folyam nagyságát!

Házi feladat

1. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az s csúcsból az átellenes t csúcs felé. Hogyan kell a kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyamnagyság a lehető legnagyobb legyen?

2. A (G, s, t, c) hálózatban az egyik él, e kapacitása $c(e) = x$. A többi él kapacitása állandó, nem függ x-től. Legyen $M(x)$ a maximális folyam nagysága x függvényében. Tudjuk, hogy $M(1) = 1$, $M(100) = 10$. Határozzuk meg $M(2)$ értékét.