Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2025. február 14.

Elemi leszámlálások, szita-formula

Tudnivalók:

Ismétlés nélküli permutáció: n különböző elem összes sorrendje: $n!$

Ismétléses permutáció: $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, n elem, k féle, $n_1, \ldots n_k$ egyforma. összes sorrend: $n!/(n_1!n_2! \cdots n_k!)$

Ismétlés nélküli variáció: n különböző elemből k különbözőt, sorrend számít: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$

Ismétléses variáció: n féle elemből k nem feltétlenül különbözőt, sorrend számít: n^k

Ismétlés nélküli kombináció: n különböző elemből k különbözőt, sorrend nem számít: $n(n-1)\cdots(n-k+1)/k! = \binom{n}{k}$

Ismétléses kombináció: n féle elemből k nem feltétlenül különbözőt, sorrend nem számít: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Skatulya elv: $n+1$ tárgy n dobozba: lesz olyan doboz, amiben legalább két tárgy van.

Szita formula: $|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum |\text{2-es metsz}| + \sum |\text{3-as metsz}| - \cdots (-1)^{i+1} \sum |i\text{-es metsz}| + \cdots (-1)^{n+1} \sum |n\text{-es metsz}|$

Erdős-Szekeres tétel: Minden n^2+1 hosszú sorozat tartalmaz egy $n+1$ hosszú növekedő vagy csökkenő részsorozatot. n^2+1 nem javítható.

1. Bizonyítsuk be az Erdős-Szekeres tételt általánosabb formában: Minden $kl+1$ hosszú sorozat tartalmaz egy $k+1$ hosszú növekedő vagy $l+1$ hosszú csökkenő részsorozatot. A korlát nem javítható.
2. A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?
3. Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
4. A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?
5. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találathoz (a tizenháromból)?
6. Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?
7. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
8. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?
9. És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
10. Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?
11. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).
12. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
13. Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?
14. Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?
15. Minimálisan hány töréssel lehet egy 4×5-ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?
16. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben?
    Mik a válaszok futókra?(*)
17. Igazoljuk, hogy bármely 5 egymást követő egész szám szorzata osztható 120-szal. Mit mondhatunk k egymást követő egész szám szorzatáról?

18. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n számra (i) $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$, (ii) $\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.
19. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
20. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
21. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
22. Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K	♠	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

23. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)
24. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?
25. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban $k_1, k_2, \ldots, k_n$ szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
26. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezet fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezet a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezet, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? (*)
27. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\varphi(n) = n\prod_{p|n,\ p \text{ prím}}(1-\frac{1}{p})$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma.
28. Igazoljuk, hogy 2019 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2019 többszöröse legyen.
29. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?
30. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n, k > 1$ egészek esetén megadható olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{nk}$ különböző számokból álló sorozat, amely nem tartalmaz sem $n+1$ tagú növekedő, sem $k+1$ tagú csökkenő részsorozatot.
31. Mennyi n elem fixpont nélküli permutációinak száma? (Az olyan permutációk száma érdekel bennünket, melyben semmilyen $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ elemre sem teljesül, hogy éppen az i. helyen állna.) Ha ez az érték $f(n)$, akkor mennyi az $f(n)/n!$ arány limesze, ha n tart végtelenhez?
32. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)
33. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)
34. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell ,,venniük" a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (*)
35. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphasson helyet a testületben?(*)

Házi feladatok

1. a. Egy hosszú alakú asztalnál egymás mellett ülő n emberből hányféleképpen lehet olyan k-tagú bizottságot kijelölni, amelybe nem kerülnek közvetlenül egymás mellett ülő tagok? (*)

   b. Ugyanaz, csak az n ember egy kör alakú asztalnál ül. (*)
2. a. Az $(x + y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
   b. Az $(2x + 3y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
   (A *kifejtés* során elvégezzük a beszorzásokat és összevonjuk az azonos szorzatokat, tehát minden tag $C_i x^i y^{100-i}$ alakot ölt alkalmas i-re. A kérdés a C_i együtthatókról szól.)

   Segítség: hasonlítsuk össze a szomszédos együtthatókat! A választ indokolni/bizonyítani kell!