# Hamilton körök, utak.

Hamilton kör G-ben: olyan kör ami minden csúcsot tartalmaz.
út                                  út

Hamilton kör/út: nehéz eldönteni hogy van-e és megtalálni
(NP teljes)

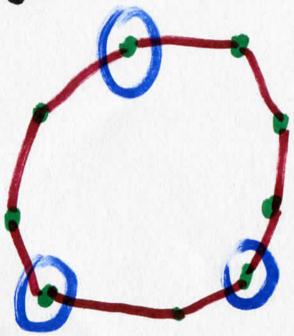
nincs egyszerű szükséges és elégséges feltétel.

<u>Szükséges feltétel:</u> G-ben van H-kör (út) $\Rightarrow$

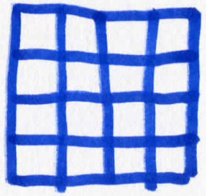
bárhogy törlünk $k$ pontot $(0 \le k \le n) \rightarrow$ max $k$ $(k+1)$
összefüggő komponens.

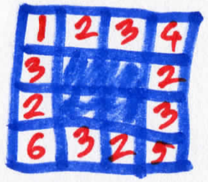
Biz:

k vágás: max k ív.



k vágás: max k+1 ív.

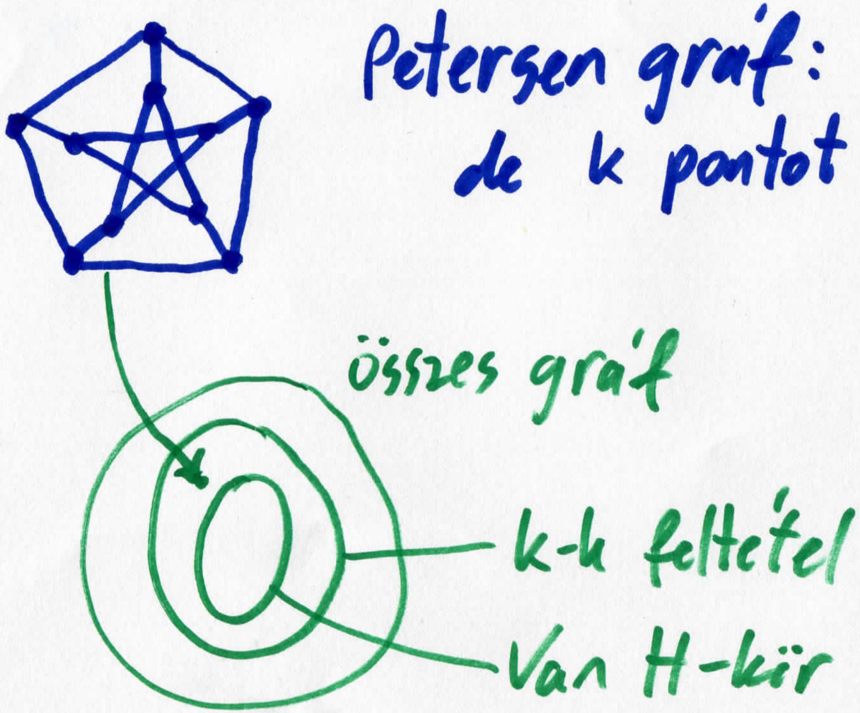
Pl:  Be lehet járni lóval? (mindenhova 1-szer lépünk)

NEM: 


G: 16 csúcsú lólépés-gráf.
Hagyjuk el a középső 4 mezőt.
→ 6 komponens!

De: ez a feltétel (H-körre) nem elégséges!

Petersen gráf: nincs Hamilton kör (biz: kicsit vacakolós)
de k pontot elhagyva max k komponens.



Elégséges feltételek:

Dirac: $\forall d_i \geq n/2 \Rightarrow$ van H-kör

Ore: $\forall$ nem szomszédos $x, y$-ra $d_x + d_y \geq n \Rightarrow$ van H-kör

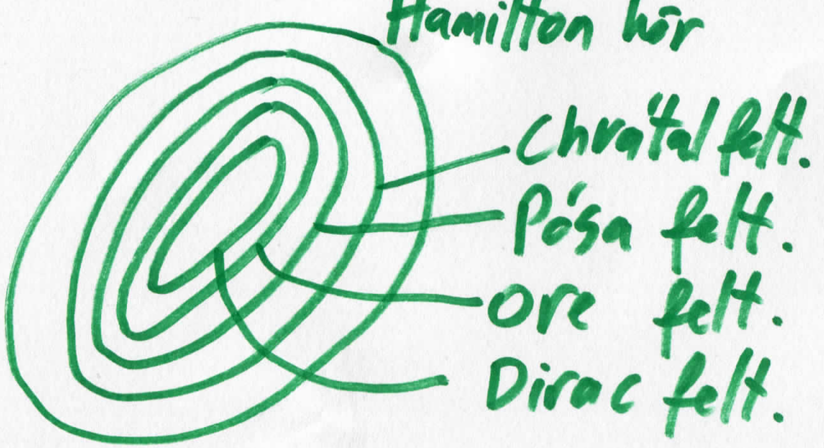
Pósa: $d_1 \leq d_2 \cdots d_n$, $\forall k < \frac{n}{2}$-re $d_k \geq k+1 \Rightarrow$ van H-kör

Chvátal: $d_1 \leq d_2 \cdots d_n$ $\forall k < \frac{n}{2}$-re $d_k \geq k+1$ vagy $d_{n-k} \geq n-k$

$\Rightarrow$ van H-kör.

Ezek egyre erősebb tételek:

Dirac feltétel $\rightarrow$ Ore feltétel $\rightarrow$ Pósa feltétel $\rightarrow$ Chvátal feltétel.

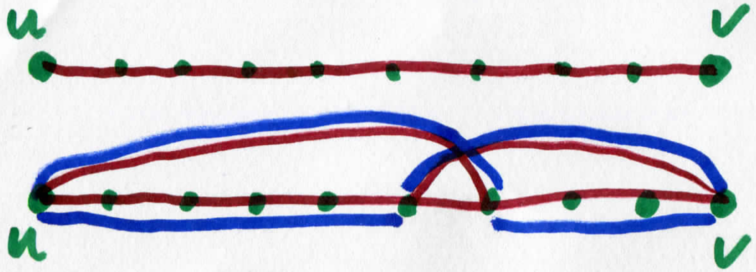



Chvátal: fokszámok alapján a lehető legerősebb.

Trivi: Ore tétel erősebb Diracnál, vagyis
Dirac feltétel → Ore feltétel: Ha $\forall d_i \geq n/2$ akkor
$\forall$ (nem szomszédos) $x, y$: $d_x + d_y \geq n$.

<u>Ore biz:</u> $G$: maximális ellenpélda az Ore tételre:
$G$-re igaz az Ore feltétel, nincs H-köre, de tetszőleges élt hozzáadva lesz H-köre.

Legyen $u, v$ nem szomszédos.
$G + uv$ él: van H-kör. → $G$-ben van $u$–$v$ Hamilton út.




$u$ szomszédai előtti (balra) pontok nem lehetnek $v$ szomszédai:
(különben: H-kör)

$v$-nek $d_u$ db pont nem szomszédja, és $v$ sem: $\underline{d_u + d_v \leq n-1}$
$(d_v \leq n-1-d_u)$

KÉSZ ↯

Biz: Pósa tétel erősebb, mint az Ore tétel: Ore feltétel $\Rightarrow$ Pósa feltétel.

Tfh $G$-re Ore feltétel igaz, Pósa nem. $\longrightarrow$

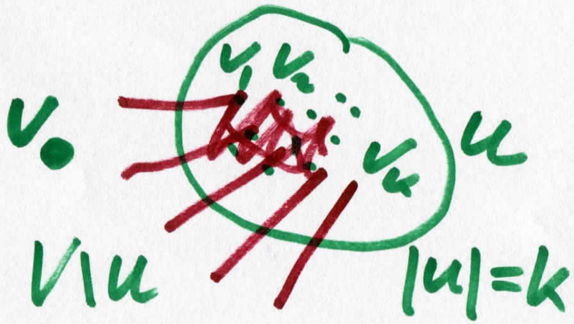
$d_1 \le d_2 \cdots \le d_n$ van $k < \frac{n}{2}$ : $d_k \le k$.

$d_1 \le d_2 \cdots d_k \le k < \frac{n}{2}$ Ore feltétel: $v_1 \cdots v_k$ össze vannak kötve.

$(i, j \le k: \; d_i + d_j \le 2k < n)$

Tehát $v_1 \cdots v_k$: teljes gráf.

Belül: fok $= k-1$ : mindegyikből max 1 él kifele.




$|V \setminus U| = n-k > k$

$k < \frac{n}{2}$ : van $V \setminus U$-ban $v$ : nincs összekötve $U$-val. $\to$ $d(v) \le n-k-1$

$d(v_k) \le k$ $\quad$ $v$ és $v_k$ nincsenek összekötve, és

$d(v) + d(v_k) \le n-1$ nem teljesül az Ore! ↯

KÉSZ

Chvátal: $d_1 \le \dots \le d_n$, $\forall k < \frac{n}{2}$: $d_k \ge k+1$ vagy $d_{n-k} \ge n-k$. $\Rightarrow$ H-kör

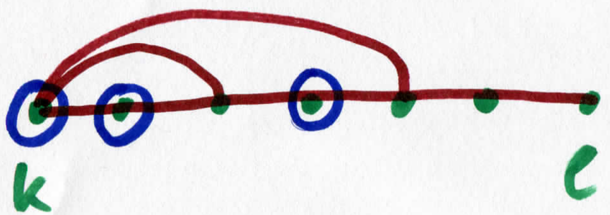
Trivi: erősebb a Pósa tételnél.

<u>Chvátal biz:</u> csúcsok: $1, 2 \dots n$. $d(1) \le \dots \le d(n)$.

G: maximális ellenpélda. (Chvátal feltétel igaz, nincs H-kör, plusz él $\Rightarrow$ van H-kör)

Legyen $k, l$ nem szomszédos.

Ekkor van $k - l$ Hamilton út.




k szomszédai előtti (balra) pontok:

<u>$V_{k,l}$</u>: ezek nem szomszédosak $l$-lel.

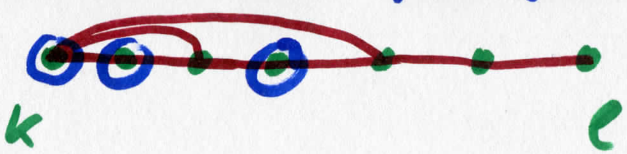
$\rightarrow d(k) + d(l) \le n-1$ ($\rightarrow$ eddig: Ore biz...)

Legyen $k, l$ nem szomszédos, amire $d(k)+d(l)$ maximális.

$k < l$ $d(k) < d(l)$ $d(k) + d(l) \le n-1$

$k, l$ nem szomszédos, $d(k)+d(l)$ maximális. $k<l$, $d(k)<d(l)$

$d(k)+d(l) \leq n-1$.




$V_{k,l}$: $k$ szomszédai elötti pontok.

$d(k)+d(l) \leq n-1$, $d(k)<d(l) \longrightarrow d(k) < \frac{n}{2}$. $V_{k,l}$: $d(k)$ db pont.

Ha $i \in V_{k,l}$: nem szomszédos $l$-lel: $d(i)+d(l) \leq d(k)+d(l)$

$$d(i) \leq d(k).$$

$\longrightarrow$ Van $d(k)$ db pont, aminek a foka $\leq d(k) \longrightarrow d(d(k)) \leq d(k) \xrightarrow[\text{Chvátal feltétel}]{} d(n-d(k)) \geq n-d(k)$

$\longrightarrow$ Van $d(k)+1$ db pont, aminek a foka $\geq n-d(k)$.

Ezek közül valamelyik, $i$, nem szomszédja $k$-nak.

$$d(i)+d(k) \geq n-d(k)+d(k) = n$$

$\lightning$ mert $d(k)+d(l) \leq n-1$ maximális volt.

KÉSZ

Chvátal: lehető legerősebb,
amit csak a fokszámok alapján mondani lehet.

Tfh $d_1 \le \dots \le d_n$ megsérti a Chvátal feltételt.

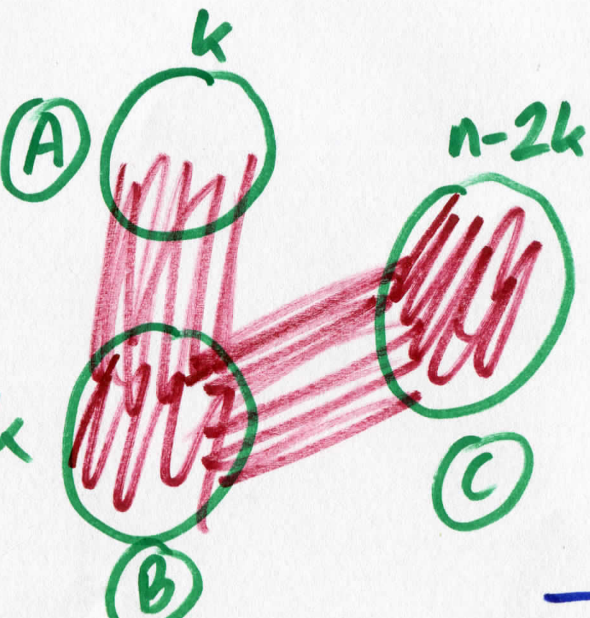
Ekkor van $G$, amiben nincs H-kör, $G$ fokszámai
$d_1' \le \dots d_n'$, és $\forall i$ $d_i' \ge d_i$.

<u>Biz</u>: $d_1 \le \dots d_n$ megsérti a Chvátalt. $\rightarrow$ van $k < \frac{n}{2}$:

$d_k \le k$, $d_{n-k} \le n-k-1$. $\rightarrow$ $d_1 \dots d_k \le k$, $d_{k+1} \dots d_{n-k} \le n-k-1$

$d_{n-k+1} \dots d_n \le n-1$

G gráf:




G: B-t elhagyva k+1 komponens
$\rightarrow$ nincs H-kör.

Viszont:

| | | |
|---|---|---|
| k | db | k-fokú |
| n-2k | | n-k-1 |
| k | | n-1 |

$\rightarrow \forall\ d_i' \ge d_i$ KÉSZ