LAPOS MODULUSOK, LAPOS CSALÁDOK

SZABÓ ENDRE

KIVONAT. A fejezet célja, hogy megismertessen a laposság fogalmával, a leggfontosabb rá vonatkozó tételekkel, és – példákon keresztül – megmutassa, miért hasznos, miért olyan fontos fogalom ez a geometriában. Néhány bizonyítást is adunk. Előismeretek: Elemi kommutatív algebra, sémák és koherens kévék definíciója, kéve kohomológia fogalma, hosszú egzakt sorozat.

6. LAPOSSÁG ELEMI TULAJDONSÁGAI

Definíció 6.1 (Lapos modulus)**.** *Legyen A egy (kommutatív, egységelemes) gyűrű, M egy A-modulus. Az M modulus* lapos *az A gyűrű felett, ha a következő – ekvivalens – feltételek valamelyike teljesül:*

(1) *Az M-mel való tenzor-szorzás egzakt funktor.*
(2) *Minden $I \triangleleft A$ végesen generált ideálra az $I \otimes M \to M$ (szorzás: $i \otimes m \to im$) leképezés injektív.*
(3) *Ha a $\sum_i a_i m_i = 0$ összefüggés fennáll bizonyos $m_i \in M$ és $a_i \in A$ elemek között, akkor annak kézzel fogható oka van: az m_i elemek előállíthatók $m_i = \sum_j b_{i,j} n_j$ alakban, ahol $n_j \in M$ elemek és $b_{i,j} \in A$ olyan mátrix, amire a $\sum_i a_i b_{i,j} = 0$ összefüggés teljesül minden j-re.*
(4) $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *minden N A-modulusra.*
(5) $\mathrm{Tor}_k^A(N, M) = 0$ *minden N A-modulusra és minden $k \geq 1$ kitevőre.*

Az M hűségesen lapos *A felett, ha lapos, és minden $N \neq 0$ A-modulusra $N \otimes_A M \neq 0$.*

Tétel 6.2 (Laposság elemi tulajdonságai)**.** *Legyen A egy kommutatív egységelemes gyűrű, M egy A-modulus. Legyen $A \to B$ egy (kommutatív) A-algebra (tehát gyben A-modulus is), és N egy B-modulus (tehát egyben A-modulus is).*

(1) **Indukált modulus.** *Ha M lapos A felett, akkor $B \otimes M$ lapos B-modulus.*
(2) **Tranzitivitás:** *Ha B lapos A felett, és N lapos B felett, akkor N lapos az A felett is. Fordítva: ha B hűségesen lapos A felett, és N lapos A felett, akkor N lapos B felett is.*

(3) **Lokalizálás:** *Ha $S \subset A$ tetszőleges multiplikatív rendszer, akkor a hányados gyűrű $S^{-1}A$ lapos A-algebra. Ezért ha M lapos A-modulus, akkor $S^{-1}M$ lapos lesz mind A, mind pedig $S^{-1}A$ felett. Speciálisan, ha $p \triangleleft A$ egy prímideál, akkor a lokális gyűrű A_p lapos A-algebra.*

(4) **A laposság lokális tulajdonság:** *ezek ekvivalensek*
   (a) *M lapos,*
   (b) *a lokalizált M_p lapos A_p-modulus minden $p \triangleleft A$ prímideálra,*
   (c) *a lokalizált M_m lapos A_m-modulus mindem $m \triangleleft A$ maximális ideálra.*

(5) **Teljessé tétel.** *Ha A lokális Noether gyűrű, és $I \triangleleft A$ egy idál, akkor $\hat{A} = \lim\limits_{\longleftarrow} A/I^k$, az A teljessé tétele hűségesen lapos A felett. Tehát a végesen generált M pontosan akkor lapos A felett, ha $\hat{M} = \lim\limits_{\longleftarrow} M/I^k M = M \otimes_A \hat{A}$ lapos $\hat{A}$ felett.*

(6) **Egzakt sorozatok:** *Legyen $0 \to K \to M \to L \to 0$ A-modulusok rövid egzakt sorozata. Ha K, L laposak, akkor M is az. Ha M, L laposak, akkor K is az.*

(7) **Véges modulusok:** *Legyen A Noether gyűrű és M végesen generált A-modulus. Ekkor*
   (a) M lapos $\Longleftrightarrow$ M projektív
   Ha ezen felül még A lokális gyürű, akkor
   (b) M lapos $\Longleftrightarrow$ M szabad

(8) **Főideál gyűrűk:** *Legyen A főideál-gyűrű. Ekkor M lapos $\Longleftrightarrow$ M torziómentes.*

Definíció 6.3 (Lapos kéve, lapos morfizmus)**.** *Legyenek X, Y tetszőleges sémák, $\mathcal{F}$ koherens kéve X-en, és $f : X \to Y$ egy tetszőleges morfizmus. Legyen $x \in X$ tetszőleges pont, és legyen $y = f(x)$. Ekkor a lokális gyűrű $\mathcal{O}_{x,X}$ egy $\mathcal{O}_{y,Y}$ algebra, és a lokalizált $\mathcal{F}_x$ egy végesen generált $\mathcal{O}_{x,X}$ modulus. $\mathcal{F}$* lapos az x pontban Y felett*, ha $\mathcal{F}_x$ lapos $\mathcal{O}_{y,Y}$ felett. Továbbá $\mathcal{F}$* lapos Y felett*, ha minden $x \in X$ pontban lapos. Speciálisan, azt mondjuk, hogy f* lapos morfizmus*, vagy X* lapos Y felett*, ha a struktúra kéve O_X lapos.*

Tétel 6.4 (Laposság elemi tulajdonságai)**.** *Legyenek X, Y tetszőleges sémák, $\mathcal{F}$ koherens kéve X-en, és $f : X \to Y$ egy tetszőleges morfizmus.*

(1) **Nyílt beágyazások:** *Minden nyílt beágyazás lapos.*

(2) **Báziscsere:** *Legyen $Y' \to Y$ tetszőleges morfizmus, tekintsük a rost-szorzat diagrammot:*

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f'}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f}\Big\downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Ha f lapos, akkor f' is az. Általánosabban, ha $\mathcal{F}$ lapos Y felett, akkor $g^*\mathcal{F}$ is lapos Y' felett.

(3) **Kompozíció** *Lapos morfizmusok kompozíciója is lapos. Általánosabban, ha $\mathcal{F}$ lapos Y felett, és $Y \to Z$ egy lapos morfizmus, akkor $\mathcal{F}$ lapos Z felett.*

(4) **Affin sémák:** *Legyen $A \to B$ gyűrű-homomorfizmus, ez megad egy* $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ *morfizmust. Ekkor*
B lapos A felett $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Spec} B$ *lapos* $\operatorname{Spec} A$ *felett.*

(5) **Koherens kévék:** *Ha X Noether séma, és $\mathcal{F}$ koherens, akkor $\mathcal{F}$ lapos X felett $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ lokálisan szabad. Általánosabban, ha f véges leképezés, és Y Noether, akkor $\mathcal{F}$ lapos Y felett $Longleftrightarrow$ $f_*\mathcal{F}$ lokálisan szabad. Ha pedig f véges és lapos, akkor $\mathcal{F}$ lapos Y felett $Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ lokálisan szabad.*

7. Asszociált pontok

Definíció 7.1 (Asszociált pímek, primér felbontás)**.** *Legyen A egy Noether gyűrű, M egy végesen generált A-modulus. Egy $\mathfrak{p} \lhd A$ prímideál* asszociált ideálja *az M-nek, ha van olyan $x \in M$ elem, amelyiknek az annullátora* $\operatorname{ann} x = \mathfrak{p}$. *Az asszociált prímek halmazát* $\operatorname{Ass}(M)$*-mel jelöljük.*
Egy Q végesen generált modulust primér modulusnak *nevezünk, ha egyetlen asszociált prím tartozik hozzá. Ekvivalens definíció: ha $aq = 0$ valamely $a \in A$, $q \in Q$ elemekre, akkor vagy $q = 0$ vagy $a^nQ = 0$. Az egyetlen asszociált prím éppen a Q annullátorának a (nilpotens) radikálja.*
Az M végesen generált modulusnak van véges sok M_i részmodulusa, amelyek metszete 0, és az M/M_i faktor-modulusok primérek. A $0 = \cap_i M_i$ előállítást az M primér-felbontásának *nevezzük. A felbontás nem feltétlenül egyértelmű, de ha minimális, akkor a primér-modulusokhoz asszociált prímek egyértelműek, megegyeznek az M asszociált prímjeivel.*
Ha $S \subset A$ tetszőleges multiplikatív rendszer, akkor az $S^{-1}M$ modulus

asszociált prímjei éppen azok az $S^{-1}p \triangleleft S^{-1}A$ *prímek, amelyekre* p *az* M *asszociált prímje, és* $S \cap p = \emptyset$.

Definíció 7.2 (Asszociált pontok, primér felbontás). *Legyen* X *egy Noether séma, és* $\mathcal{F}$ *egy koherens kéve rajta. Egy* $p \in X$ *pont* asszociált pontja *az* $\mathcal{F}$*-nek, ha a lokalizált* $\mathcal{F}_p$ *modulusnak asszociált ideálja lesz az* $\mathcal{O}_{p,X}$ *lokális gyűrű maximális ideálja. Az asszociált pontok halmazát* $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$*-fel jelöljük.*
Az asszociált pontok lezártjai (a Zariski topológiában) az X *zárt részhalmazai, ezek uniója éppen* $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}$*, az* $\mathcal{F}$ tartója. *Azokat az asszociált pontokat, amelyek benne vannak egy másik asszociált pont lezártjában,* beágyazot pontoknak *hívjuk.*

A tartót korábban másképpen definiáltuk: azon p pontok halmaza, ahol az $\mathcal{F}_p$ lokalizált modulus nem nulla. Ez ekvivalens a most adott új definícióval.
Ha X egy "integral" séma, azaz $\mathcal{O}_X$ nullosztómentes, akkor $\mathrm{Ass}(X)$ éppen az X irreducibilis komponenseinek az általános pontjaiból áll, tehát nincs beágyazott pontja.
Ha X egy hiperfelület egy sima varietáson, akkor lokálisan egy egyenlettel adható meg, mert a sima varietás lokális gyűrűjében érvényes az egyértelmű prímfelbontás (hiszen reguláris lokalis gyűrű). Az egyenlet prímfelbontása megadja az $\mathcal{O}_X$ modulus primér-felbontását is, tehát $\mathrm{Ass}(X)$ pontjai megfelelnek az egyes prímtényezőknek. Tehát X-nek nincs beágyazott pontja. Ugyanez a gondolatmenet érvényes lokkálisan teljes metszet varietásokra is.
Természetesen a kévék asszociált pontjait lehet ideál-kévék segítségével is definiálni, a modulusokra kimondott definíciók, állítások mind érvényben maradnak.
Akármelyik definíciót is használjuk, koherens kévékre is működik a primér-felbontás, noha ennek a szép eredménynek még egyetlenegy alkalmazását sem láttam.

8. Laposság lokális kritériuma

Gyakran találjuk magunkat a következő helyzetben: $f : X \to Y$ morfizmus, $\mathcal{F}$ koherens kéve X-en, $x \in X$ egy pont, $y = f(x)$. Ha tudunk valamit az X_y, $\mathcal{F}_y$ rostokról az x pontban, akkor jó lenne ezt az információt "kiterjeszteni" az X-re illetve az $\mathcal{F}$-re is. Sok tulajdonságra ismerünk ilyen kiterjesztést, ha $\mathcal{F}$ lapos Y felett az x pontban. Az első lépés tehát az, hogy elégséges feltételeket találjunk erre a laposságra. Az olyan jellegű tételeket, ahol az $\mathcal{F}_y$ rost laposságából (bizonyos feltételek mellett) következtetünk az eredeti $\mathcal{F}$ laposságára, "laposság lokális kritériuma" gyűjtőnéven emlegetjük.

Tétel 8.1. *Legyenek A egy Noether gyűrű, B egy Noether lokális A-algebra, $I \lhd A$ egy ideál és M egy végesen generált B-modulus. Tegyük fel, hogy $1 \notin IB$, azaz IB egy valódi ideált B-ben. Jelölje γ_k a*

$$\gamma_k : I^k/I^{k+1} \otimes_A M/IM \to I^k M/I^{k+1}M \qquad (\textit{szorzás})$$

leképezést. A következő állítások mind ekvivalensek:

(1) *M lapos A-modulus.*
(2) *Minden N A/I-modulusra* $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.
(3) *M/IM lapos A/I modulus, és* $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.
(4) *M/IM lapos A/I-modulus, és az $I \otimes_A M \to IM$ (szorzás) izomorfizmus.*
(5) *M/IM lapos A/I-modulus, és mindegyik γ_k izomorfizmus.*
(6) *Minden k-ra M/I^kM lapos A/I^k-modulus.*
(7) *$\hat{M} = \varprojlim M/I^kM$ lapos $\hat{A} = \varprojlim A/I^k$ modulus.*

Megjegyzések. Az a feltétel, hogy B lokális, csak azért szükséges, hogy Krull metszet-tételét használhassuk. Ezért gyengíthető. Másrészt a bizonyításban egyedül a (7)$\Rightarrow$ (1) rész használja ezt a feltételt.

Bizonyítás. (1)$\Rightarrow$(2): világos.

(2)$\Rightarrow$(3): Ha N egy A/I modulus, akkor $N \otimes_A M = N \otimes_{A/I} (M/IM)$. Legyen $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ A/I modulusok rövid egzakt sorozata. Ekkor

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(Z, M) \to X \otimes_{A/I} (M/IM) \to Y \otimes_{A/I} (M/IM)$$

tehát M/IM lapos A/I modulus.

(3)$\Leftrightarrow$(4): következik ebből az egzakt sorozatból:

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(A, M) \to \mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) \to I \otimes_A M \to A \otimes_A M = M$$

(3)$\Rightarrow$(2): Legyen N egy A/I-modulus, válasszunk egy generátorrendszert. Ez ad egy $0 \to R \to F \to N \to 0$ rövid egzakt sorozatot, ahol F szabad A/I-modulus. Erre

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(F, M) \to \mathrm{Tor}_1^A(N, M) \to R \otimes_{A/I} (M/IM) \to F \otimes_{A/I} (M/IM)$$

A jobboldali nyíl injektív, mert M/IM lapos A/I-modulus. Ezért $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

(4)+(2)$\Rightarrow$(5): A feltétel miatt $\mathrm{Tor}_1^A(I^k/I^{k+1}, M) = 0$ minden k-ra. Tekintsük a $0 \to I^{k+1} \to I^k \to I^k/I^{k+1} \to 0$ egzakt sorozatot, és a belőle gyártható

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & I^{k+1} \otimes M & \to & I^k \otimes M & \to & (I^k/I^{k+1}) \otimes M & \to & 0 \\
 & & \downarrow \mu_{k+1} & & \downarrow \mu_k & & \downarrow \gamma_k & & \\
0 & \to & I^{k+1}M & \to & I^kM & \to & I^kM/I^{k+1}M & \to & 0
\end{array}$$

diagrammot. Itt μ_k a szorzás, és a feltétel miatt μ_1 izomorfizmus. k szerinti indukcióval következik, hogy minden μ_k és minden γ_k izomorfizmus.

(5)⇒(6): Rögzítsünk egy k-t, belátjuk, hogy M/I^k lapos A/I^k-modulus. Minden $i < k$-ra tekintsük a $0 \to I^{i+1}/I^k \to I^i/I^k \to I^i/I^{i+1} \to 0$ egzakt sorozatot, és a belőle nyerhető

$$\begin{array}{ccccccccc} & & (I^{i+1}/I^k)\otimes M & \to & (I^i/I^k)\otimes M & \to & (I^i/I^{i+1})\otimes M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_i} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_i} & & \\ 0 & \to & I^{i+1}M/I^kM & \to & I^iM/I^kM & \to & I^iM/I^{i+1}M & \to & 0 \end{array}$$

diagrammot. Itt ν_i és ν_{i+1} a szorzás M/I^kM-ben, és a harmadik függőleges nyíl azonosítható γ_k-val, hiszen $(I^i/I^k)\otimes M = (I^i/I^k)\otimes(M/IM)$. A feltétel szerint minden γ_i izomorfizmus, és $\nu_k = 0$ szintén izomorfizmus, tehát i szerinti lefelé indukcióval látható, hogy minden ν_i izomorfizmus. Tehát $\nu_1 : (I/I^k)\otimes(M/I^kM) \to I(M/I^kM)$ is izomorfizmus. Tehát az M/I^kM A/I^k-modulusra teljesül (4). Ezért (2) is teljesül rá: $\mathrm{Tor}_1^A(N, M/I^kM) = \mathrm{Tor}_1^{A/I^k}(N, M/I^kM) = 0$ minden N A/I-modulusra. i szerinti teljes idukcióval belátjuk, hogy ugyanez minden N A/I^i-modulusra is igaz. Valóban, ha N egy A/I^{i+1}-modulus, akkor IN és N/IN már A/I^i-modulusok, így a

$$\mathrm{Tor}_1^A(IN, M/I^kM) \to \mathrm{Tor}_1^A(N, M/I^kM) \to \mathrm{Tor}_1^A(N/IN, M/I^kM)$$

egzakt sorozat két széle 0. Tehát $\mathrm{Tor}_1^{A/I^k}(N,M) = \mathrm{Tor}_1^A(N,M) = 0$ minden A/I^k modulusra, azaz M/I^kM lapos A/I^k-modulus.

(6)⇒(7): következik az inverz limesz egzaktságából (Ha szürjektívek a homomorfizmusok, akkor egzakt funktor).

(7)⇒ (1): Legyen $\hat{B} = \varprojlim B/I^kB$ a B teljessé tétele. 6.2. Tétel (5) miatt $\hat{A}$ hűségesen lapos A-modulus, tehát $\hat{M}$ lapos A-modulus. Másrészt $\hat{M} = M \otimes_B \hat{B}$, tehát az $\_ \otimes_A \hat{M} = (\_ \otimes_A M)\otimes_B \hat{B}$ funktor egzakt. Mivel $\hat{B}$ is hűségesen lapos B-modulus, azért az $\_ \otimes_A M$ funktor is egzakt, azaz M lapos. □

Következmény 8.2. *Legyen (A, m) egy Noether lokális gyűrű, B egy Noether lokális A-algebra. Legyen $M \xrightarrow{g} N \to Q \to 0$ végesen generált B-modulusok egy rövid egzakt sorozata. Tegyük fel, hogy N lapos A felett. Ekkor*

(1) *g injektív és Q lapos A felett $\Longleftrightarrow$ $g \otimes_A (A/m)$ injektív,*
(2) *g izomorfizmus $\Longleftrightarrow$ $g \otimes_A (A/m)$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha g injektív és Q lapos A felett, akkor

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(Q, A/m) \to M \otimes (A/m) \to N \otimes (A/m)$$

is egzakt, azaz $g \otimes (A/m)$ injektív.

Visszafelé: tegyük most fel, hogy $g \otimes_A (A/m)$ injektív. Legyen $x \in \ker(g)$. A feltevésünk miatt $x \in mM$, teljes indukcióval belátjuk, hogy $\in m^k M$ minden k-ra. Tegyük hát fel, hogy $x \in m^k M$, és válasszunk olyan $a_1, \dots a_s \in I^k$ elemeket, amelyek képe bázist alkot m^k/m^{k+1}-ben. Ekkor $x = \sum_i a_i x_i$ alakban írható valamilyen $x_i \in M$ elemekkel. De ekkor $\sum_i a_i g(x_i) = 0$ N-ben, és N lapos A-modulus, tehát 6.1. Definíció (3) szerint vannak $b_{i,j} \in A$ és $y_j \in N$ elemek, amelyekre

$$g(x_i) = \sum_j b_{i,j} y_j$$

minden i-re és

$$\sum_i a_i b_{i,j} = 0$$

minden j-re. Mivel az a_i elemek képei függetlenek m^k/m^{k+1}-ben, azért $b_{i,j} \in m$ minden i, j indexre. Ezért $g(x_i) \in mN$, és mivel $g \otimes_A (A/m)$ injektív, azért $x_i \in mM$ minden i-re. Ekkor viszont $x = \sum_i a_i x_i \in m^k mM = m^{k+1}M$. Beláttuk hát, hogy $x \in \cap_{k=0}^{\infty} m^k M$. De Krull metszett-tétele szerint ez utóbbi modulus 0, azaz g injektív. A $0 \to M \to N \to Q \to 0$ egzakt sorozatot A/m-mel tenzor-szorozva:

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(A/m, N) \to \mathrm{Tor}_1^A(A/m, Q) \to M \otimes (A/m) \xrightarrow{g \otimes (A/m)} N \otimes (A/m)$$

azaz $tor_1^A(A/m, Q) = 0$. Tehát 8.1. Tétel miatt Q lapos A-modulus.

Világos, hogy ha g izomorfizmus, akkor $Q = 0$ és $g \otimes (A/m)$ is izomorfizmus.

Fordítva: tegyük fel, hogy $g \otimes (A/m)$ izomorfizmus. Az előbb beláttuk, hogy g injektív ebben az esetben, tehát $M \leq N$ olyan részmodulus, amire $M + mN = N$. Nakayama-lemma miatt ekkor $M = N$, tehát g izomorfizmus. $\square$

Következmény 8.3. *Legyenek (A, m) és (B, n) lokális Noether gyűrűk, $\phi : A \to B$ egy lokális homomorfizmus (azaz $mB \subset n$), jelölje $F = B/mB$ a ϕ "rostját" az m pontban. Ha A reguláris, B Cohen-Macaulay, és $\dim B = \dim A + \dim F$ akkor B lapos A felett.*

Bizonyítási ötlet: Nem fogjuk használni, de nagyon fontos. $\dim A$ szerinti indukcióval kell bizonyítani. Ha $x \in m \setminus m^2$ egy tetszőleges elem (reguláris paraméternek hívják), akkor az indukciós feltétel miatt $B' = B/xB$ lapos lesz $A' = A/xA$ felett. Tehát $\mathrm{Tor}_1^A(A/m, B) =$

$\operatorname{Tor}_1^{A'}(A/m, B') = 0$ (itt kell, hogy x nem nullosztó sem A-ban, sem B-ben), azaz 8.1. Tétel miatt B lapos A felett. □

Tétel 8.4. *Legyen (A, m) egy Noether gyűrű, B egy Noether lokális A-algebra, és M egy végesen generált B-modulus. M pontosan akkor lapos A fölött, ha minden $p \in \operatorname{Ass}_B(M/mM)$ prímideálra a lokalizált M_p lapos A-modulus.*

Megjegyzés. Nem használjuk, nem is bizonyítjuk – de ide illik. Ez is a 8.1. Tétel következménye.

9. Laposság a geometriában

Tétel 9.1 (Laposság és a rost-dimenzió). *Legyen $f : X \to Y$ egy test felett véges típusú sémák közti morfizmus. Ha X lapos Y felett, akkor*

$$\dim_x X = \dim_x X_{f(x)} + \dim_{f(x)} Y$$

minden $x \in X$ pontban. Itt $X_{f(x)} = X \times_Y k(f(x)) = f^{-1}(f(x))$ az f rostja az $f(x)$ pont felett.

Tétel 9.2 (Görbe felletti laposság). *Legyen Y egy sima görbe, X egy Noether séma, $f : X \to Y$ egy morfizmus, és $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en. $\mathcal{F}$ pontosan akkor lapos Y felett, ha monden asszociált pontja az Y valamelyik általános pontjába képződik. (Azaz $f(\operatorname{Ass}(X) \subset \operatorname{Ass}(Y)$.)*

Tétel 9.3 (Lapos kiterjesztés). *Legyen Y egy sima görbe, $X \to Y \setminus \{p\}$ egy projektív morfizmus. Tegyük fel, hogy X lapos $Y \setminus \{p\}$ felett. Ekkor létezik egyetlen olyan $X \subset \bar{X} \to Y$ kiterjesztés, amelyik projektív, megegyezik X-szel az $Y \setminus \{p\}$ nyílt halmazon, és lapos az egész Y felett. Általánosabban: Legyen Y sima görbe, és $\mathcal{F}$ koherens kéve $(Y \setminus \{p\}) \times \mathbb{P}^n$-en, lapos $Y \setminus \{p\}$ felett. Ekkor létezik egyetlen olyan $\bar{\mathcal{F}}$ koherens kéve $Y \times \mathbb{P}^n$-en, amelyik megegyezik $\mathcal{F}$-fel az $(Y \setminus \{p\}) \times \mathbb{P}^n$ nyílt halmazon, és lapos az egész Y fölött.*

Tétel 9.4 (Hilbert Polinom). *Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve egy projektív varietáson (egy test fölött). $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$ jelöli az $\mathcal{F}$ elcsavartjait. Az Euler-karakterisztika*

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(X, \mathcal{F}(n))$$

az n-nek polinom-függvénye, ezt nevezzük az $\mathcal{F}$ Hilbert-polinomjának. *Elég nagy n esetén $H^0(X, \mathcal{F}(n)) = \chi(\mathcal{F}(n))$, ez a Hilbert-polinom klasszikus definíciója.*

Tétel 9.5 (Hilbert polinomok és a Laposság). *Legyen T egy séma, $\mathcal{F}$ koherens kéve $T \times \mathbb{P}^n$-en. Ha $\mathcal{F}$ lapos T felett, akkor a rostok Hilbert polinomja:*

$$t \to \chi(\mathcal{F} \otimes k(t)) \qquad t \in T$$

lokálisan konstans függvény a T pontjain. Fordítva, ha $\mathcal{O}_T$ nullosztómentes, és a rostok Hilbert polinomja lokálisan konstans, akkor $\mathcal{F}$ lapos T felett.

Tétel 9.6 (Félig folytonosság, Grauert tétele)**.** *Legyen $f : X \to Y$ "proper" morfizmus Noether sémák között, és legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en, lapos Y felett.*

(1) *Ekkor minden i-re a*

$$h^i(y,\mathcal{F}) = \dim H^i(X_y,\mathcal{F}_y) \qquad y \in Y$$

függvény felülről félig folytonos Y-on.

(2) *Ha $\mathcal{O}_Y$ nullosztó mentes, és $h^0(y,\mathcal{F})$ konstans, akkor $f_*\mathcal{F}$ lokálsan szabad (azaz vektornyaláb), és az*

$$f_*\mathcal{F} \otimes k(y) \to H^0(X_y,\mathcal{F}_y) \qquad y \in Y$$

természetes leképezés izomorfizmus minden y pont fölött.

(3) *Általánosabban, ha $\mathcal{O}_Y$ nullosztó mentes, és $h^i(y,\mathcal{F})$ konstans valamelyik i-re, akkor $f_*\mathcal{F}$ lokálsan szabad (azaz vektornyaláb), és az*

$$R^i f_*\mathcal{F} \otimes k(y) \to H^i(X_y,\mathcal{F}_y) \qquad y \in Y$$

természetes leképezés izomorfizmus minden y pont fölött.

10. Lapos felbontás

Tétel 10.1 (Általános laposság)**.**

(1) *Legyen A egy nullosztó-mentes Noether gyűrű, B egy végesen generált A-algebra, és M egy végesen generált B-modulus. Ekkor van olyan $f \in A$ elem, amelyre a lokalizált M_f szabad A_f-modulus.*

(2) *Legyenek X, Y Noether sémák, tegyük fel, hogy $\mathcal{O}_Y$ nullosztómentes. Legyen $f : X \to Y$ egy véges típusú morfizmus, és legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en. Ekkor van olyan $U \subset Y$ sűrű nyílt halmaz, amelyre $f^{-1}(U)$ lapos U felett, és a megszorított $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ kéve is lapos U felett.*

Bizonyítás. A második rész az első rész átfogalmazása, az elsőt bizonyítjuk. Teljes indukcióval érvelünk, a B algebra generátorainak száma szerint. Először nézzük azt az esetet, amikor $B = A$ (nincs generátor). Legyen K az A hányados-testje. Mivel $M_K = M \otimes K$ egy véges dimenziös vektortér, azért választhatunk egy $m_1, \dots m_n \in M$ bázisát. Az M generátorai kifejezhetők a bázis-vektorok K-együtthatós lineáris kombinációjaként, legyen $f \in A$ egy közös nevezö az összes együtthatóhoz.

Ekkor az A_f lokalizált gyűrű felett az $m_1, \ldots m_n$ generálja az M_f lokalizált modulust. Mivel az m_i generátorok még K felett is függetlenek, azért M_f szabad A_f-modulus.

Legyen most B egy elem által generált C-algebra, ahol C olyan A-algebra, amelyikre érvényes a tétel. Legyen x a B generátora C felett, és legyen $N \leq M$ egy olyan végesen generáls C-részmodulus, amelyik B fölött az egész M-et generálja. Legyen $N_{-1} = 0$, és

$$N_i = \sum_{j=0}^{i} x^j N \leq M \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Világos, hogy $N - i$ végesen generált C-modulusok növő lánca, uniójuk az egész M. Az x elemmel való szorzás megad egy szürjektív $x^i N \xrightarrow{\cdot x} x^{i+1} N$ homomorfizmust, ami indukál egy

$$N_i / N_{i-1} \xrightarrow{\cdot x} N_{i+1} / N_i \qquad \text{szürjektív}$$

homomorfizmust. A Noether tulajdonság miatt tehát az N_i / N_{i-1} modulusok véges sok kivételével mind izomorfak. Ha alkalmazzuk rájuk a tételt (hiszen véges sok végesen generált C-modulusról van szó), akkor találunk olyan $f \in A$ elemet, amelyre az $(N_i / N_{i-1})_f$ lokalizált modulusok mind szabad A_f-modulusok. Ha a szabad generátorokat $(N_i)_f$-be felemeljük, és uniózzuk minden i-re, akkor az $\bigcup_i (N_i)_f = M_f$ A_f-modulus egy szabad generátor-rendszerét kapjuk. □

Tétel 10.2 (Nagata trükkje). *Legyen X egy Noether topológikus tér (zárt halmazok leszálló lánca véges). Egy $U \subset X$ részhalmaz pontosan akkor nyílt, ha*

(1) *Ha egy $Q \in U$ pont benne van egy $P \in X$ pont lezártjában, akkor $P \in U$.*
(2) *Ha $P \in U$, akkor a P lezártjának egy nem-üres nyílt részhalmaza is U-ban van.*

A bizonyítás könnyű, legyen házi feladat.

Tétel 10.3 (Laposság nyílt tulajdonság).

(1) *Legyen A egy Noether gyűrű, B egy végesen generált A-algebra, és M egy végesen generált B-modulus. Azon $\mathfrak{p} \triangleleft B$ prímideálok halmaza, amelyekre a lokalizált $M_\mathfrak{p}$ lapos A-modulus, Zariski-nyílt részhalmaz* $\operatorname{Spec}(B)$*-ben (esetleg üres).*
(2) *Legyenek X, Y Noether sémák, $X \to Y$ véges típusú leképezés, és $\mathcal{F}$ koherens kéve X-en. Azon pontok, amelyekben $\mathcal{F}$ lapos Y felett, nyílt halmazt alkotnak X-ben (esetleg üreset).*

Bizonyítás ötlete. A két állítás egymás átfogalmazása, mindegy, melyiket bizonyítjuk. Nagata trükkjét (10.2. Tétel) használjuk. Az első feltétel a lokalizált gyűrűk laposságából (6.2. Tétel (3)) következik. A második feltételt két darabból kell össze-tákolni: Ha A nullosztómentes, akkor az általános laposság (10.1. Tétel) segít rajtunk, az általános esetet pedig visszavezethetjük erre a laposság valamelyik lokális kritériumával (pl. 8.1. Tétel (5)). $\square$

Tétel 10.4 (Lapos felbontás)**.** *Legyenek X, Y Noether sémák, $f : X \to Y$ véges típusú leképezés, és $\mathcal{F}$ koherens kéve X-en. Tekintsük a $Z \to Y$ morfizmusokra a következő diagrammot:*

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{G} & X \\ {\scriptstyle f_Z}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Létezik egyetlen olyan $g : Z \to Y$ morfizmus, amelyikre az $X \times_Y Z$-re visszahúzott $G^*\mathcal{F}$ kéve lapos Z felett, és g univerzális erre a tulajdonságra nézve: ha $g' : Z' \to Y$ egy másik morfizmus, amire $G'^*\mathcal{F}$ szintén lapos Z' felett, akkor van olyan $h : Z' \to Z$ morfizmus, amire $g' = h \circ g$. Továbbá, ez a $g : Z \to Y$ egy lokálisan zárt beágyazás, és g bijekciót ad Z és Y pontjai közt. Tehát Z összefüggő komponensei lokálisan zárt halmazokra partícionálják Y-t.

Bizonyítási ötlet.