TANANYAG ÖSSZEFOGLALÓ

Tanárszakos geometria előadás, BSC, 3. félév

2009. tavasz

Ez a jegyzet tartalmazza a félév folyamán elhangzott fontosabb állításokat, melyek majd a vizsgához is szükségesek. A jegyzet nagyrészben Hajós György "Bevezetés a geometriába" című könyvének megfelelő részeire alapul. Amennyiben egy fogalom a könyvben nincs megfelelően tárgyalva, vagy más szempontból lett tárgyalva, itt részletes ismertetésre kerül.

Felhasznált fogalmak

Felhasználjuk a valós vektortér és mátrix fogalmát, és azok szorzását illetve determinánsát. Az affin síkot úgy tekintjük, mint a két dimenziós valós vektortér $\mathbb{R}^2$, az affin teret pedig, mint a három dimenziós valós vektortér $\mathbb{R}^3$. Az origót mint pontot O, mint nullvektort $\bar{o}$ jelöli. Vektorokat $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ jelöl. $\mathbb{R}^2$-beli $A \neq B$ pontok szakaszát $[A, B]$, távolságát AB jelöli, és a pontok meghatározta egyenesről mint AB egyenesről beszélünk. Továbbá az AB félegyenes az A kezdőpontú, B-n áthaladó félegyenes.

Contents

1 A valós projektív sík és néhány modellje

Részben megtalálható a Hajós könyv 44. fejezetében (441-451. oldal)

Alapötlet A projektív sík legkönnyebben úgy képzelhető el, hogy a "közönséges" affin síkot, azaz $\mathbb{R}^2$-t, kiegészítjük a végtelen távoli ún. ideális egyenessel. Ennek pontjai egy az egybe megfelelnek az egymással párhuzamos "közönséges" affin síkbeli egyenes családjainak, azaz két affin síkbeli egyenesnek pontosabban akkor ugyan az az ideális pontja, ha párhuzamosak. Így bármely két projektív egyenesnek van metszéspontja. Ez a szemlélet jelenik meg az alábbi első modellben.

Az affin sík kibővítése például a következőképpen jellemezhető: Ha egy "közönséges" affin síkbeli egyenes mentén az egyik vége felé haladunk, és elérünk a végtelen távoli ideális pontjához, akkor tovább haladva az egyenes másik végétől indulva folytatjuk az utunkat, visszaérve az affin síkra. Másszóval ha az affin síkot egy szobának képzeljük, és kimászunk az egyik oldalon lévő ablakon, akkor tovább haladva a szemközti oldalon lévő ajtón térünk vissza a szobába.

A projektív sík definíciója igen absztrakt, mivel sajnos a valós projektív sík nem modellezhető egy az egybe valamely R^3-beli felület pontjaival. Éppen ezért szerepel több modell is, ugyanis különböző projektív síkbeli problémák más-más modellben oldhatóak meg egyszerűbben.

Definíció A valós projektív sík $P\mathbb{R}^2$ pontjai az R^3 térnek az O origót tartalmazó egyensei. A valós projektív sík egyenesei az R^3 térnek az O origót tartalmazó síkjai. Az O origót tartalmazó R^3-beli L egyenes és S sík esetén, az L-nek megfelelő projektív pont pontosan akkor pontja az S-nek megfelelő projektív egyenesnek, ha $L \subset S$. Ezt másszóval úgy is mondjuk, hogy a pont illeszkedik az egyenesre, illetve az egyenes illeszkedik a pontra.
Megjegyzés Az egy pontra illeszkedő egyeneseket olykor sugársornak hívják, az egy egyenesre illeszkedő pontokat pedig pontsornak.

Lemma A valós projektív sík bármely két egyenese egy pontban metszi egymást, és bármely két pontján át pontosan egy egyenes húzható.

Bizonyítás Az R^3-beli origót tartalmazó S_1 és S_2 síkok által meghatározott projektív egyenesek metszéspontja az S_1 és S_2 síkok R^3-beli metszésvonalához tartozik. Továbbá az R^3-beli origót tartalmazó L_1 és L_2 egyenesek által meghatározott projektív pontok azon az egy projektív egyenesen vannak rajta, mely az L_1 és L_2 által kifeszített síkhoz tartozik. $\square$

MODELLEK

A valós projektív sík, mint az affin sík kibővítése
Tekintsünk egy tetszőleges origót NEM tartalmazó $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ síkot, melyet megfeleltetünk az $\mathbb{R}^2$ affin síknak. Legyen továbbá S_∞ az $\mathbb{R}^3$-beli origót tartalmazó, Σ-val párhuzamos sík, mely által jellemzett projektív egyenes a végtelen távoli ideális egyenes a modellben.

Ha L egy $\mathbb{R}^3$-beli origót tartalmazó, Σ-val nem párhuzamos egyenes, akkor az L jelemezte projektív P pontot azonosítjuk a $\Sigma \cap L$ metszésponttal. Ha $S \neq S_\infty$ egy $\mathbb{R}^3$-beli origót tartalmazó sík, akkor az általa jellemzett projektív egyenes affin síkbeli pontjaiból áll a $e = \Sigma \cap S$ egyenes. Ennek ideális pontja az e-vel (és így Σ-val is) párhuzamos $S \cap S_\infty$ $\mathbb{R}^3$-beli egyeneshez tartozik. Egy $e' \subset \Sigma$ affin egyenes pontosan akkor páruzamos e-vel, ha a megfelelő projektív egyenesek metszéspontja nincs Σ-ban, azaz egy közös ideális pont.

Egy projektív egyenest két pontja két szakaszra osztja - az egyik tartalmazza az egyenes ideális pontját, a másik nem.

Itt a végtelen távoli egyenesnek tetszőleges projektív egyenest választhatunk, hiszen tetszőleges origót tartalmazó S_∞ síkhoz választhatunk egy vele párhuzamos Σ-t. Ez a választási lehetőség átláthatóbbá teszi igen sok feladat megoldását.

Vektormodell: A valós projektív sík jellemzése térbeli vektorokkal
Tetszőleges $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektor meghatározza az $\mathbb{R}^3$-beli origót tartalmazó $L = \{\lambda \bar{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ egyenest. Ez az egyenes a valós projektív sík egy pontját határozza meg, melyet $[\bar{a}]$ pontnak hívunk. Itt $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén az $[\bar{a}]$ és $[\bar{b}]$ projektív pontok pontosan akkor esnek egybe, ha $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re, azaz ha $\bar{a}$ és $\bar{b}$ összefüggő. Ez utóbbi reláció nyilván ekvivalencia reláció a nem nulla térbeli vertorokon, és a projektív sík pontjai az ezen reláció szerinti ekvivalencia osztályok.

Másrészt egy $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ meghatározza az $\mathbb{R}^3$-beli origót tartalmazó $S = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^3 : \bar{a} \cdot \bar{b} = 0\}$ síkot, azaz aminek $\bar{a}$ egy normálvektora. Így $\bar{a}$ jellemzi a valós projektív sík S-hez tartozó egyenesét is, melyet $[\bar{a}]$ egyenesnek hívunk. Ismét $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén az $[\bar{a}]$ és $[\bar{b}]$ projektív egyenesek pontosan akkor esnek egybe, ha $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re.

Rögtön adódik, hogy $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén az $[\bar{a}]$ projektív pont pontosan akkor van rajta a $[\bar{b}]$ projektív egyenesen, ha $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Tehát független $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén az $[\bar{a}]$ és $[\bar{b}]$ projektív pontok egyenese az $[\bar{a} \times \bar{b}]$ projektív egyenes, illetve az $[\bar{a}]$ és $[\bar{b}]$ projektív egyenesek metszéspontja az $[\bar{a} \times \bar{b}]$ projektív pont. Továbbá tetszőleges $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektorokra, $[\bar{a}]$, $[\bar{b}]$ és $[\bar{c}]$ projektív pontok pontosan akkor esnek egy egyenesbe, ha $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ összefüggő. Továbbá $[\bar{a}]$, $[\bar{b}]$ és $[\bar{c}]$ projektív egyenesek pontosan akkor mennek át egy ponton, ha $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ összefüggő.

A valós projektív sík megadása homogén koordinátákkal

Ha adott egy orthonormált bázisú koordinátarendszer $\mathbb{R}^3$-ban, akkor tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ koordinájú vektornak megfelel a fenti modell szerinti P projektív pont. Itt (x, y, z)-t P homogén koordinátáinak hívjuk. Két hármas $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ pontosan akkor homogén koordinátái ugyanannak a projektív pontnak, ha található $\lambda \in \mathbb{R} \backslash 0$, melyre $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, és $z' = \lambda z$.

Hasonlóan az $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ koordinájú vektornak megfelelő e projektív egyenesen pontosan akkor van rajta az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ homogén koordinátájú projektív pont, ha a megfelelő skaláris szorzat 0, azaz

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0.$$

Ez az (x_0, y_0, z_0) vektor által meghatározott egyenes homogén egyenlete.

A projektív homogén koordináták és az affin síkbeli koordináták között a következőképpen teremthető kapcsolat. Legyen Σ a $z = 1$ egyenletű sík $\mathbb{R}^3$-ben, amit $\mathbb{R}^2$-vel azonosítunk a fenti első modell szerint. Ekkor Σ pontjainak homogén koordinátái (x, y, z) alakúak, ahol $z \neq 0$. Pontosabban a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontnak a projektív sík $(x, y, 1)$ homogén koordinátájú pontja felel meg. Másrészt a projektív sík (x, y, z), $z \neq 0$, homogén koordinátájú pontjának, melynek $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ is homogén koordinátája, az affin sík $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ pontja felel meg. Például $\mathbb{R}^2$ bármely egyenesének egyenlete $ax + by + c = 0$ az (x, y) koordinátákkal. Az egyenes egyenlete a homogén koordinátákkal $a\frac{x}{z} + b\frac{x}{z} + c = 0$, azaz a projektív síkon $ax + by + cz = 0$. Az utóbbi egyenletben már akár $z = 0$ is megengedett, azaz általa a projektív egyenes minden pontját megkapjuk.

A valós projektív sík megadása a gömbfelület átellenes pontjainak azonosításával

Legyen $S^2 = \{P \in \mathbb{R}^3 : PO = 1\}$ az $\mathbb{R}^3$-beli, O origó középpontú egységgömb felszíne. Tetszőleges L, az origón áthaladó egyenes S^2-t két átellenes pontjában metszi. Tehát a valós projektív sík megkapható az S^2 gömbfelület átellenes pontjainak azonosításával.

A projektív egyenesek a főkörök átellenes pontjainak azonosításával adódnak, hiszen bármely origót tartalmazó sík egy főkörben metszi S^2-t.

Egy projektív egyenest két pontját a megfelelő főkör két átellenes pontpárja adja meg. A négy pont négy körívre osztja a főkört, és négyük közül a szemközti körívek azonosításával adódik a két szakasz, amire a projektív egyenest osztja a két pontja.

A valós projektív sík félgömb modellje

Rögzítsünk egy $Q \in S^2$ pontot, mely helyvektora $\mathbb{R}^3$-ben $\bar{q}$, és tekintsük az S^2-nek a Q középpontú félgömbfelületét, azaz azon $P \in S^2$ pontokat, melyek $\bar{p}$ helyvektorára $\bar{p} \cdot \bar{q} \geq 0$. A Q pontra gondolhatunk, mint az északi sark, a félgömböt határoló σ főkörre, mint az egyenlítő, és a félgömbre, mint az északi félgömb.

A projektív sík pontjai egyrészt a a nyílt félgömbfelület pontjai, másrészt a σ egyenlítő átellenes pontjainak azonosításával adódó pontok.

Itt a végtelen távoli egyenes szerepét az egyenlítő átellenes pontjainak azonosításával adódó projektív egyenes játssza. A többi projektív egyenest úgy kapjuk, hogy tekintjük egy tetszőleges, az egyenlítőtől különböző főkörnek az északi félgömbbe eső félkörívét, és az egyenlítőre eső két végpontot azonosítjuk.

Ez a modell úgy kapható az előző modellből, hogy egyszerűen elfeledkezünk az S^2-nek a nyílt déli félgömbbe eső pontjairól.

A valós projektív sík körlemez modellje

Tekintsünk egy tetszőleges K körlemezt $\mathbb{R}^2$-n, legyen ∂K a határa. A projektív sík pontjai egyrészt a a K belsejének pontjai, másrészt a ∂K körvonal átellenes pontjainak azonosításával adódó pontok.

Itt a végtelen távoli egyenes szerepét a ∂K átellenes pontjainak azonosításával adódó projektív egyenes játssza. A többi projektív egyenest úgy kapjuk, hogy ∂K két átellenes pontját összekötjük vagy az átmérővel, vagy egy K belsejét metsző körívvel, és a két átellenes végpontot azonosítjuk.

Ez a modell úgy kapható az előző modellből, hogy az északi félgömböt sztereografikusan vetítjük a déli sarkból az északi sarkbeli érintősíkra. Ebben az esetben K sugara 2, és középpontja az északi sark.

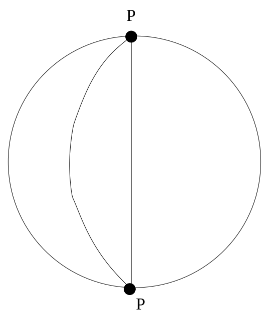

Figure 1:

2 Gráfok lerajzolhatóságáról az affin és a projektív síkon

Emlékeztető Gráfelméletben K_n jelöli az n csúcsú teljes gráfot, azaz ha bármely két csúcs össze van kötve. Továbbá $K_{3,3}$ jelöli a "három ház, három kút" gráfot, azaz adott hat csúcs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, és $i < j$ pontosan akkor van összekötve, ha $i \leq 3$ és $j \geq 4$.

Definíció Egy gráfot az $\mathbb{R}^2$ affin síkon (illetve a $P\mathbb{R}^2$ valós projektív síkon) lerajzolhatónak mondjuk, ha a gráfot tudjuk úgy reprezentálni, hogy a gráf csúcsai síkbeli pontok, és a gráf élei a megfelelő pontpárok közötti, egymást át nem metsző szakaszok.

Megjegyzés A Kuratowski tétel megadja, mikor lehet egy gráfot $\mathbb{R}^2$-ben lerajzolni. Például K_5-t és $K_{3,3}$-t nem lehet.

Tétel K_6 lerajzolható a valós projektív síkon, tehát K_5 és $K_{3,3}$ is.
Megjegyzés Ismert, K_7-t már a valós projektív síkra sem lehet lerajzolni.
1. Bizonyítás *Modell: A gömbfelület átellenes pontjainak azonosítása*
Tekintsünk egy szabályos ikozaédert, melynek csúcsai az S^2 gömbfelületen vannak. Ennek 12 csúcsa 6 átellenes párba rendezhető. Ha a valós projektív síkot az S^2 átellenes pontjainak azonosításával adjuk meg, akkor az ikozaéder csúcsaiból 6 pontot kapunk.

Az ikozaédernek 30 éle van, amelyek 15 átellenes párba rendezhetőek. A gömbközéppontból az éleket kivetítjük a gömbfelületre. Így az átellenes pontok azonosítás után 15 egymást át nem metsző szakaszt kapunk a 6 csúcs között. Miután a 6 csúcsú gráfnak legfeljebb $\binom{6}{2} = 15$ éle lehet, az összes lehetséges élt behúztuk, azaz a K_6 egy lerajzolását kaptuk.

2. Bizonyítás *Körlemezmodell*

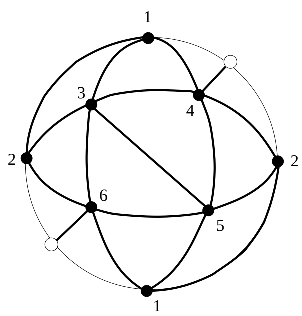

Figure 2:

3 Dualitás

Definíció (Dualitás a vektormodellben) Tetszőleges $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektor esetén a valós projektív sík $[\bar{a}]$ pontjának a a duálisa a $[\bar{a}]$ projektív egyenes, és viszont. Másszóval $\bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén, a valós projektív sík $[\bar{b}]$ pontja pontosan akkor van rajta a $[\bar{c}]$ pont duálisán, ha $\bar{b} \cdot \bar{c} = 0$.
Megjegyzés Pont (vagy egyenes) duálisának duálisa önmaga.

Lemma A valós projektív sík tetszöleges $A \neq B$ pontjai egyenesének a duálisa az A és B duálisának metszete.
Bizonyítás Legyenek $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektorok az A illete a B pont reprezentánsai, amelyek függetlenek $A \neq B$ miatt. Így az AB egyeneshez tartozó egyik normálvektor $\bar{a} \times \bar{b}$, azaz AB egyenes duálisa a $[\bar{a} \times \bar{b}]$ projektív pont. Másrészt $\bar{a} \times \bar{b}$ merőleges mind az $\bar{a}$, mind a $\bar{b}$ vektorra, tehát rajta van mind az A, mind a B duálisán. $\square$

Dualitás elve Egy pontok és egyenesek illeszkedéséröl szóló állítás duálisát úgy kapjuk, hogy a "pont" és "egyenes" szavakat felcseréjük, továbbá pontok által meghatározott egyenes helyett egyenesek metszéspontját mondunk, és viszont. A fenti lemma miatt ha egy állítás teljesül, akkor annak duálisa is.

DUALITÁS NÉHÁNY MODELLBEN

A gömbfelület átellenes pontjainak azonosítása
Egy A projektív pontot a gömbfelület egy átellenes pontpárja reprezentál. Ezek középpontjai a gömbfelület egy főkörének, mely az A duálisát reprezentálja.

Közönséges sík kibővétése
Tekintsük azt a modellt, melyben az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontnak a $[(x, y, 1)]$ projektív síkbeli pont felel meg (azaz $\mathbb{R}^2$-t a $\Sigma = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkkal azonosítjuk). Így az $\mathbb{R}^2$ origójának a duálisa a végtelen távoli egyenes (hiszen $[(0, 0, 1)]$ duálisát az $S_\infty = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ sík reprezentálja). Ha $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ egy $A \in \mathbb{R}^2$ koordinátái, akkor $[(x, y, 1)]$ projektív pont pontosan akkor van rajta $[(x_0, y_0, 1)]$ projektív pont duálisán, ha

$$0 = (x_0, y_0, 1) \cdot (x, y, 1) = x_0 x + y_0 y + 1.$$

Másszóval a $B \in \mathbb{R}^2$ pontosan akkor van rajta A duálisán, ha $\bar{a} \cdot \bar{b} = -1$, ahol $\bar{a}(x_0, y_0)$ és $\bar{b}(x, y)$ az $\mathbb{R}^2$-beli helyvektorok.

4 Papposz tétel, Desargues tétel

(Hajós könyv, 44.8, 451-453. oldal)

Tétel (Papposz tétel) Ha A_1, A_2, A_3 egy egyenesen, és B_1, B_2, B_3 egy másik egyenesen fekvő különböző pontok a valós projektív síkon, és P_{ij} jelöli az A_iB_j és A_jB_i egyenesek metszéspontját $i \neq j$-re, akkor P_{12}, P_{23} és P_{31} egy egyenesen vannak.

Tétel (Papposz tétel duálisa) Ha a_1, a_2, a_3 különböző egyenesek egy ponton mennek át, és b_1, b_2, b_3 különböző egyenesek egy másik ponton mennek át a valós projektív síkon, és e_{ij} jelöli az a_i és b_j egyenesek metszéspontján, és a_j és b_i egyenesek metszéspontján áthaladó egyenest $i \neq j$-re, akkor e_{12}, e_{23} és e_{31} egyenesek egy ponton mennek át.

Tétel (Desargues tétel) Tegyük fel, a valós projektív síkbeli A_1, A_2, A_3 pontok, illetve B_1, B_2, B_3 pontok nincsenek egy egyenesen, $A_i \neq B_i$ $i = 1, 2, 3$-ra, és P_{ij} jelöli az A_iA_j és B_iB_j egyenesek metszéspontját $i \neq j$-re. Ekkor P_{12}, P_{23} és P_{31} pontosan akkor vannak egy egyenesen, ha A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át.
Megjegyzés Másszóval két háromszög pontosan akkor perspektív egyenesre nézve, ha pontra nézve perspektív.

5 Projektív transzformációk (kollineációk)

Emlékeztető Az affin sík $\mathbb{R}^2$ egy Φ transzformációja affinitás, ha egyenestartó, azaz bármely egyenest bijektíven és folytonosan képez le valamely egyenesre. Múlt félévben beláttuk, hogy található egy 2×2-es $\mathcal{N}$ invertálható mátrix és $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, hogy tetszőleges $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ helyvektorú P pontra $\Phi(P)$ helyvektora $\mathcal{N}\bar{p} + \bar{v}$.

Definíció Φ a valós projektív sík $P\mathbb{R}^2$ egy projektív transzformációja, (másnéven kollineációja), ha egyenestartó, azaz bármely egyenest bijektíven és folytonosan képez le valamely egyenesre.
Megjegyzés A definícióból következik, hogy projektív transzformációk kompozíciója is projektív transzformáció.

Projektív transzformációk alkalmazásáról
Ha a valós projektív síkot $\mathbb{R}^2$ kibővítésének tekintjük, akkor projektív transzformációval el lehet érni, hogy egy nem párhuzamos egyenespár párhuzamossá váljon (ha a metszéspont ideális pontba kerül). Másrészt ha adott véges sok egyenes az affin síkon, akkor projektív transzformációval el lehet érni, hogy bármely kettő messe egymást az affin síkon.

Példa *Példák projektív transzformációkra*

- *Affinitás*
  Ha a valós projektív síkot $\mathbb{R}^2$ kibővítésének tekintjük, akkor $\mathbb{R}^2$ bármely affinitása indukál egy projektív transzformációt, mely egy közönséges e egyenes ideális pontját az e képének ideális pontjába viszi. Adódik, hogy egy projektív transzformáció pontosan akkor kiterjesztése egy affinitásnak, ha az ideális egyenes önmagába képződik.

- *Középpontos vetítés térbeli síkok között*
  Ha Σ és Σ' az O origót nem tartalmazó síkok $\mathbb{R}^3$-ban, akkor az O-ból vett középpontos vetítésnél tetszőleges O-t tartalmazó L egyenesre, a Σ-nak az L-hez tartozó pontjának képe a Σ'-nek az L-hez tartozó pontjának képe. Például, ha L a Σ-t P-ben, és Σ'-t P'-ben metszi, akkor P képe P'. Vagy ha L egy a Σ-gyel párhuzamos, de Σ'-t metszi, akkor Σ-nak az L-hez tartozó ideális pontjának képe $L \cap \Sigma'$.

  Az $\mathbb{R}^3$ egy a Σ'-t a Σ-ba vivő egybevágóságát alkalmazva a fenti középpontos vetítés után a Σ egy projektív transzformációját kapjuk.

- *Lineáris leképezések (mátrixok) a vektormodellben*
  Legyen $\mathcal{M}$ egy tetszőleges 3×3-as invertálható mátrix. Tetszőleges $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektorra, legyen a $[\bar{a}]$ projektív pont képe az $[M\bar{a}]$ pont. Ez a hozzárendelés könnyen láthatóan egy bijektív projektív transzformáció.

Tétel A valós projektív sík tetszőleges projektív transzformációjához (kollineációjához) található egy 3×3-as invertálható $\mathcal{M}$ mátrix, hogy a vektormodellben $[\bar{a}]$ pont képe $[M\bar{a}]$ pont bármely $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén.

Megjegyzés Ebből az is következik, hogy egy projektív transzformációnak létezik inverze, ami szintén projektív transzformáció.

Bizonyítás Legyen Φ a projektív transzformáció, és azonosítsuk az $\mathbb{R}^3$-beli $\Sigma = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkot $\mathbb{R}^2$-vel. Továbbá legyen S_∞ az origót tartalmazó, Σ-val párhuzamos (az ideális egyenest reprezentáló) sík, és legyen S' az S_∞ képét reprezentáló origót tartalmazó sík. Válasszunk egy 3×3-as invertálható $\mathcal{M}_1$ mátrixot, mely S'-t S_∞-be viszi, és jelöljük Ψ_1-gyel az M_1 indukálta projektív transzformációt. Így $\Psi_1 \circ \Phi$ az ideális egyenest önmagába viszi, tehát $\mathbb{R}^2$ egy affin leképezésének kiterjesztése. Ahogy korábban láttuk, ez az affin lekézpezés egy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontot az $\mathcal{N}(x, y) + \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ pontba viszi, ahol

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \text{ invertálható mátrix, és } \bar{v} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Másszóval, tetszőleges $\bar{a} = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektorra a $\Psi_1 \circ \Phi$ az $[\bar{a}]$ projektív pontot az $[M_2\bar{a}]$ pontba viszi, ahol

$$M_2 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \gamma_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ egy invertálható } 3 \times 3\text{-as mátrix.}$$

Legyen $M = M_1^{-1}M_2$. Tetszőleges $\bar{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ esetén, ha Φ az $[\bar{a}]$ pontot a $[\bar{b}]$ pontba viszi, $\bar{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$, akkor $[M_1\bar{b}] = [M_2\bar{a}]$, azaz $M_1\bar{b} = \lambda \cdot M_2\bar{a}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R} \backslash 0$ számra. Ebből adódik, hogy

$$\Phi[\bar{a}] = [\bar{b}] = [\lambda \cdot M_1^{-1}M_2\bar{a}] = [M\bar{a}]. \quad \square$$

Tétel A valós projektív síkon, ha sem az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok, sem a B_1, B_2, B_3, B_4 közül nincs három egy egyenesen, akkor egyértelműen létezik egy projektív transzformáció, mely A_i-t B_i-be viszi, $i = 1, 2, 3, 4$.
Bizonyítás Legyen a vektormodellben $A_i = [\bar{a}_i]$ és $B_i = [\bar{b}_i]$, $\bar{a}_i, \bar{b}_i \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$, $i = 1, 2, 3, 4$. A feltételek miatt a $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_4$, és a $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_4$ vektorok között is bármely három független, tehát egyértelműen létezik $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \backslash 0$, melyekre

$$\bar{a}_4 = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 \quad \text{és} \quad \bar{b}_4 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \beta_3 \bar{b}_3.$$

Legyen $\mathcal{M}$ a 3×3-as invertálható mátrix, melyre

$$\mathcal{M} \bar{a}_i = \tfrac{\beta_i}{\alpha_i} \bar{b}_i \quad \text{minden } i = 1, 2, 3\text{-ra},$$

tehát

$$\mathcal{M} \bar{a}_4 = \alpha_1 \mathcal{M} \bar{a}_1 + \alpha_2 \mathcal{M} \bar{a}_2 + \alpha_3 \mathcal{M} \bar{a}_3 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \beta_3 \bar{b}_3 = \bar{b}_4.$$

Másszóval $\Phi A_i = B_i$ teljesül az $\mathcal{M}$ indukálta Φ projektív transzformációra, $i = 1, 2, 3, 4$.

A Φ egyértelműségének bizonyításához legyen Ψ tetszőleges projektív transzformáció, melyre $\Psi A_i = B_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, és legyen $\mathcal{N}$ a hozzátartozó 3×3-as invertálható mátrix. Így $\mathcal{N} \bar{a}_i = \lambda_i \bar{b}_i$, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R} \backslash 0$ és $i = 1, 2, 3, 4$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda_4 \beta_1 \bar{b}_1 + \lambda_4 \beta_2 \bar{b}_2 + \lambda_4 \beta_3 \bar{b}_3 &= \lambda_4 \bar{b}_4 = \mathcal{N} \bar{a}_4 = \mathcal{N}(\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3) \\
&= \alpha_1 \mathcal{N} \bar{a}_1 + \alpha_2 \mathcal{N} \bar{a}_2 + \alpha_3 \mathcal{N} \bar{a}_3 \\
&= \alpha_1 \lambda_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \bar{b}_2 + \alpha_3 \lambda_3 \bar{b}_3.
\end{aligned}$$

Miután $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ függetlenek, ezért $\lambda_4 \beta_i = \alpha_i \lambda_i$ minden $i = 1, 2, 3$-ra. Másszóval $i = 1, 2, 3$-ra $\mathcal{N} \bar{a}_i = \lambda_i \bar{b}_i = \frac{\lambda_4 \beta_i}{\alpha_i} \bar{b}_i = \lambda_4 \mathcal{M} \bar{a}_i$. Felhasználva, hogy $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisát alkotják, adódik, hogy $\mathcal{N} \bar{a} = \lambda_4 \mathcal{M} \bar{a}$ bármely $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ vektorra, vagyis $\Phi = \Psi$. $\square$

6 Kettősviszony

Részben megtalálható a Hajós könyv 45. fejezetében (453-462. oldal)

Alapötlet Az $\mathbb{R}^2$ közönséges síkon, az egy egyenesen fekvő különböző A_1, A_2, A_3, A_4 pontok kettősviszonya

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{A_1A_3}{A_3A_2} : \frac{A_1A_4}{A_4A_2},$$

ahol a távolsások irányítottan értendők. Továbbá, ha a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek egy ponton mennek át, és az egyenesek irányítása után a_i és a_j irányított szöge $\alpha_{ij} \in (-\pi, \pi)$, akkor az a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek kettősviszonya

$$(a_1a_2a_3a_4) = \frac{\sin\alpha_{13}}{\sin\alpha_{32}} : \frac{\sin\alpha_{14}}{\sin\alpha_{42}}.$$

Maga a kettősviszony absztrakt módon lesz definiálva, mert úgy az alaptulajdonságok könnyebben bizonyíthatóak. A kettősviszony jelentőségét az magyarázza, hogy a projektív transzformációk invariánsan hagyják.

Definíció A valós projektív sík vektormodelljében tekintsük az $A = [\bar{a}]$, $B = [\bar{b}]$, $C = [\bar{c}]$ és $D = [\bar{d}]$ különböző, de egy egyenesre eső pontokat, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$. Így $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ páronkét független de bármely három összefüggő, tehát létezik $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R}\backslash 0$, melyekre

$$\bar{c} = \lambda_3\bar{a} + \mu_3\bar{b} \quad \text{és} \quad \bar{d} = \lambda_4\bar{a} + \mu_4\bar{b}.$$

Ekkor az A, B, C, D pontok kettősviszonya ilyen sorrendben

$$(ABCD) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4}.$$

Továbbá ha az $[\bar{a}]$, $[\bar{b}]$, $[\bar{c}]$ és $[\bar{d}]$ projektív egyeneseket rendre a a, b, c és d jelöli, akkor ezek az egyenesek egy ponton mennek át, és kettősviszonyuk

$$(abcd) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4}.$$

Megjegyzés 1. Itt $\frac{\mu_3}{\lambda_3} \neq \frac{\mu_4}{\lambda_4}$, mivel $\bar{c}$ és $\bar{d}$ független, tehát $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \neq 0$ miatt

$$(ABCD) \neq 0, 1 \quad \text{és} \quad (abcd) \neq 0, 1.$$

Megjegyzés 2. Ha $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ vektorokat lecseréljük más reprezentáló $\bar{a}' = \alpha\bar{a}$, $\bar{b}' = \beta\bar{b}$, $\bar{c}' = \gamma\bar{c}$ és $\bar{d}' = \delta\bar{d}$ vektorokra, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\backslash 0$, akkor

$$\bar{c}' = \tfrac{\lambda_3\gamma}{\alpha}\,\bar{a}' + \tfrac{\mu_3\gamma}{\beta}\,\bar{b}' \quad \text{és} \quad \bar{d}' = \tfrac{\lambda_4\delta}{\alpha}\,\bar{a}' + \tfrac{\mu_4\delta}{\beta}\,\bar{b}',$$

és az új együtthatókra teljesül, hogy

$$\frac{\frac{\mu_3\gamma}{\beta}}{\frac{\lambda_3\gamma}{\alpha}} : \frac{\frac{\mu_4\delta}{\beta}}{\frac{\lambda_4\delta}{\alpha}} = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4}.$$

Tehát a kettősviszony nem függ a reprezentáló vektorok megválasztásától.

Tétel (Papposz-Steiner tétel) Ha a valós projektív síkon az a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek egy P ponton mennek át, és a P-t nem tartalmazó e egyenes a_i-t A_i-ban metszi, $i = 1, 2, 3, 4$, akkor

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = (A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Megjegyzés A tételből következik, ha egy másik P-t nem tartalmazó f egyenes a_i-t B_i-ben metszi, $i = 1, 2, 3, 4$, akkor $(B_1 B_2 B_3 B_4) = (A_1 A_2 A_3 A_4)$, azaz a középpontos vetítés tartja a kettősviszonyt.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $P = [\bar{p}]$ és $A_i = [\bar{a}_i]$ a $\bar{p}, \bar{a}_i \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$, $i = 1, 2, 3, 4$, vektorokra. Legyen $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R} \backslash 0$, melyekre

$$\bar{a}_3 = \lambda_3 \bar{a}_1 + \mu_3 \bar{a}_2 \quad \text{és} \quad \bar{a}_4 = \lambda_4 \bar{a}_1 + \mu_4 \bar{a}_2.$$

Ekkor az a_i egyenest megegyezik a $[\bar{p} \times \bar{a}_i]$ egyenessel, $i = 1, 2, 3, 4$, és

$$\begin{aligned}
\bar{p} \times \bar{a}_3 &= \lambda_3 \cdot \bar{p} \times \bar{a}_1 + \mu_3 \cdot \bar{p} \times \bar{a}_2 \\
\bar{p} \times \bar{a}_4 &= \lambda_4 \cdot \bar{p} \times \bar{a}_1 + \mu_4 \cdot \bar{p} \times \bar{a}_4,
\end{aligned}$$

tehát $(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4} = (A_1 A_2 A_3 A_4)$. $\square$

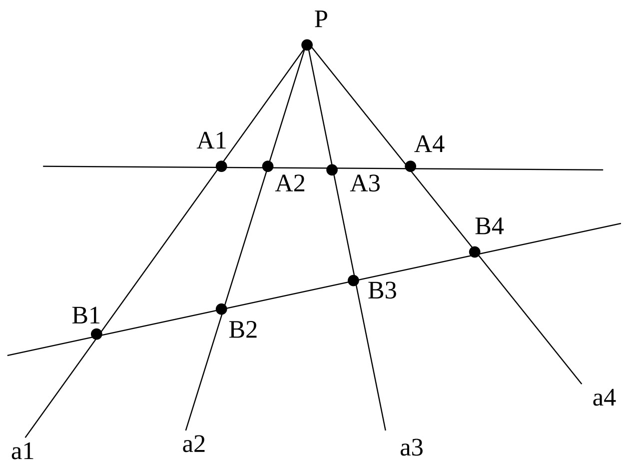

Figure 3:

Tétel Projektív leképezések tartják az egy egyenesen fekvő pontok, illetve az egy ponton átmenő egyenesek kettősviszonyát.
Bizonyítás Legyen Φ egy projektív leképezés, melyet a 3×3-as M mátrix reprezentál a vektormodellben.

Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 egy egyenesen fekvő pontok, $A_i = [\bar{a}_i]$ és $A'_i = \Phi A_i = [\bar{a}'_i]$, ahol $\bar{a}_i, \bar{a}'_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{o}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ha

$$\bar{a}_3 = \lambda_3 \bar{a}_1 + \mu_3 \bar{a}_2 \text{ és } \bar{a}_4 = \lambda_4 \bar{a}_1 + \mu_4 \bar{a}_2,$$

$\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R} \setminus 0$, akkor

$$\begin{aligned} A'_3 &= \Phi A_3 = [M a_3] = [\lambda_3 M \bar{a}_1 + \mu_3 M \bar{a}_2] = [\lambda_3 \bar{a}'_1 + \mu_3 \bar{a}'_2] \\ A'_4 &= \Phi A_4 = [M a_4] = [\lambda_4 M \bar{a}_1 + \mu_4 M \bar{a}_2] = [\lambda_4 \bar{a}'_1 + \mu_4 \bar{a}'_2], \end{aligned}$$

tehát $(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4} = (A_1 A_2 A_3 A_4)$.

Ha a_1, a_2, a_3, a_4 a P ponton átmenő egyenesek, válasszunk e egyenest, mely elkerüli a P pontot, és legyen $B_i = a_i \cap e$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ha $B'_i = \Phi B_i$ és $a'_i = \Phi a_i$, akkor $B'_i \in a'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, és a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 átmegy a ΦP ponton. Az előző eset, és a Papposz-Steiner tétel miatt

$$(a'_1 a'_2 a'_3 a'_4) = (B'_1 B'_2 B'_3 B'_4) = (B_1 B_2 B_3 B_4) = (a_1 a_2 a_3 a_4). \quad \square$$

Lemma Ha A_1, A_2, A_3, A_4 egy egyenesen fekvő pontok, akkor

- $(A_1 A_2 A_4 A_3) = (A_1 A_2 A_3 A_4)^{-1}$,
- $(A_2 A_1 A_3 A_4) = (A_1 A_2 A_3 A_4)^{-1}$,
- $(A_4 A_2 A_3 A_1) = 1 - (A_1 A_2 A_3 A_4)$.

Megjegyzés A fentiekből az A_1, A_2, A_3, A_4 tetszőleges permutációja esetén kifejezhető az új kettősviszony $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ segítségével.
Bizonyítás Tegyük fel, $A_i = [\bar{a}_i]$, ahol $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{o}$, $i = 1, 2, 3, 4$, és

$$\bar{a}_3 = \lambda_3 \bar{a}_1 + \mu_3 \bar{a}_2 \text{ és } \bar{a}_4 = \lambda_4 \bar{a}_1 + \mu_4 \bar{a}_2,$$

$\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R} \setminus 0$. Az első két tulajdonság automatikusan adódik a definícióból. A harmadik tulajdonsághoz vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \tfrac{1}{\lambda_4} a_4 + \tfrac{-\mu_4}{\lambda_4} a_2 \\ \bar{a}_3 &= \lambda_3 \left(\tfrac{1}{\lambda_4} a_4 + \tfrac{-\mu_4}{\lambda_4} a_2 \right) + \mu_3 \bar{a}_2 = \tfrac{\lambda_3}{\lambda_4} a_4 + \tfrac{\lambda_4 \mu_3 - \lambda_3 \mu_4}{\lambda_4} a_2. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy

$$(A_4 A_2 A_3 A_1) = \frac{\frac{\lambda_4 \mu_3 - \lambda_3 \mu_4}{\lambda_4}}{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}} : \frac{\frac{-\mu_4}{\lambda_4}}{\frac{1}{\lambda_4}} = 1 - \frac{\lambda_4 \mu_3}{\lambda_3 \mu_4} = 1 - (A_1 A_2 A_3 A_4). \quad \square$$

Lemma (Teljes négyoldal tétele) Tekintsünk a valós projektív síkon A, B, C, D pontokat, melyek közül semmelyik három nem esik egy egyenesre. Jelölje E az AB és CD egyenesek metszéspontját, és F az AD és BC egyenesek metszéspontját, továbbá P és Q az EF egyenes metszéspontját az AC és BD egyenesekkel. Ekkor $(EFPQ) = -1$.

Bizonyítás Legyen G az AC és BD egyenesek metszéspontja. G-ből vetíve az E, F, P, Q pontokat az AB egyenesre adódnak az $E_1 = E$, F_1, $P_1 = A$ és $Q_1 = B$ pontok. Most F-ből vetíve az E_1, F_1, P_1, Q_1 pontokat a CD egyenesre adódnak az $E_2 = E$, F_2, $P_2 = D$ és $Q_2 = C$ pontok. Végül G-ből vetíve az E_2, F_2, P_2, Q_2 pontokat az EF egyenesre adódnak az $E_3 = E$, $F_3 = F$, $P_3 = Q$ és $Q_3 = P$ pontok. Tehát

$$(EFPQ) = (E_1F_1P_1Q_1) = (E_2F_2P_2Q_2) = (E_3F_3P_3Q_3) = (EFQP) = (EFPQ)^{-1},$$

azaz $(EFPQ)^2 = 1$. Mivel $(EFPQ) \neq 1$, ezért $(EFPQ) = -1$. $\square$

Definíció Ha $(ABCD) = -1$ az egy egyenesen fekvő A, B, C, D pontokra, akkor A, B, C, D-t harmonikus pontnégyesnek hívjuk. Ilyenkor az is teljesül, hogy $(BACD) = (ABDC) = -1$, azaz B, A, C, D és A, B, D, C is harmonikus pontnégyes.

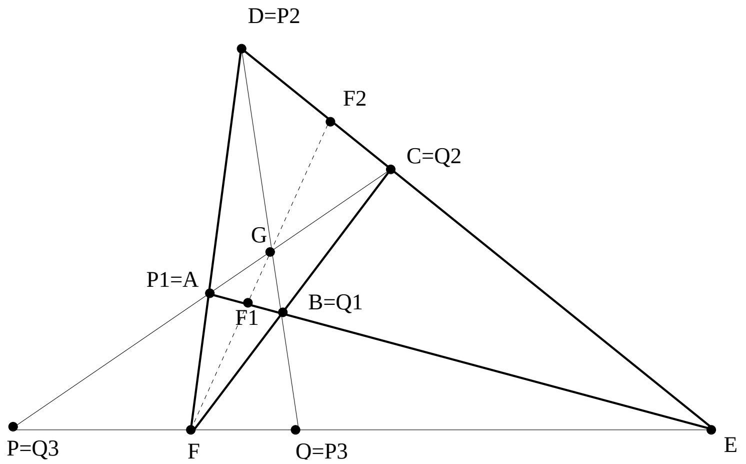

Figure 4:

Lemma Az $\mathbb{R}^2$ közönséges síkon, az egy egyenesen fekvő különböző A, B, C, D pontok kettősviszonya

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

továbbá ha D az ideális pont, akkor $(ABCD) = -\frac{AC}{CB}$.
Megjegyzés Itt a távolságok irányítottak. Például, ha $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ az A, B, C, D helyvektora $\mathbb{R}^3$-ben, és $\bar{c} - \bar{a} = t(\bar{b} - \bar{a})$ és $\bar{b} - \bar{c} = s(\bar{b} - \bar{a})$ valamely $t, s \in \mathbb{R}\backslash 0$ számokra, akkor $\frac{AC}{CB} = \frac{t}{s}$.

Bizonyítás Létezik $\mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, melyre $\bar{c} - \bar{a} = \mu_3(\bar{b} - \bar{a})$ és $\bar{d} - \bar{a} = \mu_4(\bar{b} - \bar{a})$, tehát

$$\begin{aligned} \bar{c} &= (1 - \mu_3)\bar{a} + \mu_3\bar{b} = \lambda_3\bar{a} + \mu_3\bar{b}, \quad \lambda_3 = 1 - \mu_3 \\ \bar{d} &= (1 - \mu_4)\bar{a} + \mu_4\bar{b} = \lambda_4\bar{a} + \mu_4\bar{b}, \quad \lambda_4 = 1 - \mu_4. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \bar{b} - \bar{c} &= (\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{c} - \bar{a}) = (1 - \mu_3)(\bar{b} - \bar{a}) = \lambda_3(\bar{b} - \bar{a}) \\ \bar{b} - \bar{d} &= (\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{d} - \bar{a}) = (1 - \mu_4)(\bar{b} - \bar{a}) = \lambda_4(\bar{b} - \bar{a}). \end{aligned}$$

Tehát $(ABCD) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$.
Ha D az ideális pont, akkor bármely reprezentáns $\mathbb{R}^3$-beli vektor párhuzamos az pontokat tartalmazó AB egyenessel, azaz $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$ választható, vagyis $\lambda_4 = 1$ és $\mu_4 = -1$. $\square$

Példa Ha $A \neq B$ $\mathbb{R}^2$-beli pontok, és D az AB egyenes ideális pontja, akkor $(ABCD) = -1$ pontosan akkor teljesül, ha C felezőpontja az $[A, B]$ szakasznak.

Lemma Ha az $\mathbb{R}^2$ közönséges síkon az a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek egy P ponton mennek át, és adott $A_i \in a_i$, $A_i \neq P$, $i = 1, 2, 3, 4$, pontokra a PA_i félegyenest a PA_j be $\alpha_{ij} \in (-\pi, \pi)$ szögű elforgatás viszi át, akkor

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{32}} : \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{42}}.$$

Bizonyítás Azonosítsuk $\mathbb{R}^2$-t a $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \backslash \bar{o}$ síkkal. Legyen $\bar{v}_i$ a P-ből A_i-ba mutató egységvektor, $i = 1, 2, 3, 4$, és legyen $\bar{u}$ a Σ egységnormálvektora, úgy irányítva, hogy tetszőleges $i, j = 1, 2, 3, 4$ esetén

$$\bar{v}_i \times \bar{v}_j = \sin \alpha_{ij} \cdot \bar{u}.$$

Mivel $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_4$ páronként függetlenek, ezért megfelelő $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R} \backslash 0$ együtthatókra

$$\bar{v}_3 = \lambda_3 \bar{v}_1 + \mu_3 \bar{v}_2 \;\text{ és }\; \bar{v}_4 = \lambda_4 \bar{v}_1 + \mu_4 \bar{v}_2.$$

A $\bar{v}_1 \times \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{o}$ összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{13} \cdot \bar{u} &= \bar{v}_1 \times \bar{v}_3 = \bar{v}_1 \times (\lambda_3 \bar{v}_1 + \mu_3 \bar{v}_2) = \mu_3 \cdot \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \\ \sin \alpha_{32} \cdot \bar{u} &= \bar{v}_3 \times \bar{v}_2 = (\lambda_3 \bar{v}_1 + \mu_3 \bar{v}_2) \times \bar{v}_2 = \lambda_3 \cdot \bar{v}_1 \times \bar{v}_2. \end{aligned}$$

A két egyenlőséget összevetve adódik, hogy $\frac{\sin \alpha_{13}}{\mu_3} \cdot \bar{u} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \frac{\sin \alpha_{32}}{\lambda_3} \cdot \bar{u}$, azaz $\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{\mu_3}{\lambda_3}$. Hasonlóan kapjuk a $\frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{42}} = \frac{\mu_4}{\lambda_4}$ egyenlőséget.

Másrészt, ha $\bar{p}$ jelöli a $P \in \Sigma$ pont helyvektorát $\mathbb{R}^3$-ben, akkor az a_i egyenest Σ-ból kimetsző O-t tartalmazó sík egy normálisa $\bar{p} \times \bar{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Továbbá

$$\begin{aligned} \bar{p} \times \bar{v}_3 &= \lambda_3 \cdot \bar{p} \times \bar{v}_1 + \mu_3 \cdot \bar{p} \times \bar{v}_2 \\ \bar{p} \times \bar{v}_4 &= \lambda_4 \cdot \bar{p} \times \bar{v}_1 + \mu_4 \cdot \bar{p} \times \bar{v}_2, \end{aligned}$$

tehát az a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek kettősviszonyának definíciója szerint

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4} = \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{32}} : \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{42}}. \quad \square$$

7 Kúpszeletek az affin síkban
(Hajós könyv, 41, 377-407. oldal)

Definíció *(Ellipszis)* Ha adottak F_1 és F_2 pontok $\mathbb{R}^2$-n, és $a > \frac{1}{2}F_1F_2$, akkor a $PF_1 + PF_2 = 2a$ feltételt kielégítő $P \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza az F_1 és F_2 fókuszú, a félnagytengelyű ellipszis.
Megjegyzés Ha $F_1F_2 = 2c > 0$, akkor $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ a félkistengely. Továbbá, ha $F_1F_2 = 0$ (azaz $a = b$), akkor az ellipszis egy a sugarú körvonal. Az F_i középpontú, $2a$ sugarú körvonalak az ellipszis vezérkörei $i = 1, 2$-re.

Lemma Ha $F_1(\alpha + c, \beta)$ és $F_2(\alpha - c, \beta)$ az ellipszis fókuszai $\mathbb{R}^2$-n, és a félnagytengely $a > c > 0$, akkor az ellipszis egyenlete

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ a félkistengely.}$$

Tétel Az $\mathbb{R}^2$-n egy F_1 és F_2 fókuszú ellipszis P pontjabeli érintőegyenes a PF_1 és PF_2 félegyenesek külső szögfelezője. Továbbá F_1 tükörképe az érintőre az F_2 középpontú vezérkörre esik.

Megjegyzés Tekintsük az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ vezérkörsugarú ellipszist $\mathbb{R}^2$-n. Egy P pont az ellipszis belső pontja, ha $PF_1 + PF_2 < 2a$, és külső pontja, ha $PF_1 + PF_2 > 2a$. Egy érintő minden, az érintési ponttól különböző pontja külső pont.

Definíció *(Parabola)* Adott $\mathbb{R}^2$-beli L egyenesre és $F \notin L$ pontra, az F fókúszú és L vezéregyenesű parabola azon $P \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza, melyek távolsága F-től és L-től megegyezik.

Lemma Ha egy $\mathbb{R}^2$-beli parabola fókusza $F(\alpha, \beta + p)$, és vezéregyenesének egyenlete $y = \beta - p$ valamely $p > 0$-ra, akkor a parabola egyenlete

$$4p(y - \beta) = (x - \alpha)^2.$$

Tétel Legyen P az $\mathbb{R}^2$-beli F fókúszú és L vezéregyenesű parabola egy pontja, és legyen T a P merőleges vetülete L-re. Ekkor a parabola P-beli érintője felezi PF és PT félegyensek szögét, és F tükörképe az érintőre vonatkozóan T.

Megjegyzés Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-beli F fókúszú és L vezéregyenesű parabolát. Egy P pont a parabola belső pontja, ha P közelebb van F-hez, mint L-hez, és külső pontja, ha P távolabb van F-től, mint L-től. Egy érintő minden, az érintési ponttól különböző pontja külső pont.

Definíció *(Hiperbola)* Ha adottak F_1 és F_2 pontok $\mathbb{R}^2$-n, és $0 < a < \frac{1}{2}\, F_1F_2$, akkor az $|PF_1 - PF_2| = 2a$ feltételt kielégítő P pontok halmaza egy hiperbola, mely fókuszai F_1 és F_2.
Megjegyzés Az F_i középpontú, $2a$ sugarú körvonalak a hiperbola vezérkörei $i = 1, 2$-re.

Lemma Ha $F_1(\alpha + c, \beta)$ és $F_2(\alpha - c, \beta)$ egy hiperbola fókuszai $\mathbb{R}^2$-n, és a vezérkörsugár $2a$, akkor a hiperbola egyenlete

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Megjegyzés A hiperbola asszimptotái az $y - \beta = \pm\frac{b}{a}\,(x - \alpha)$ egyenlettel megadott egyenesek.

Tétel Egy F_1 és F_2 fókuszú hiperbola P pontjabeli érintőegyenes a PF_1 és PF_2 félegyenesek belső szögfelezője $\mathbb{R}^2$-n. Továbbá F_1 tükörképe az érintőre az F_2 középpontú vezérkörre esik.

Megjegyzés Tekintsük az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ vezérkörsugarú hiperbolát $\mathbb{R}^2$-n. Egy P pont az hiperbola belső pontja, ha $|PF_1 - PF_2| > 2a$, és külső pontja, ha $|PF_1 - PF_2| < 2a$. Egy érintő minden, az érintési ponttól különböző pontja külső pont.

Megjegyzés A hiperbola aszimptotáit az ő ideális pontjukban vett érintőknek tekinthetjük, másszóval a két hiperbolaív a két aszimptota ideális pontjaiban találkozik a "végtelenben".

Tétel Tekintsük az $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletű körkúpot $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor tetszőleges az origót nem tartalmazó Σ sík vagy ellipszisben, vagy parabolában, vagy hiperbolában metszi a körkúpot.
Megjegyzés Ezért hívják ezeket a görbéket kúpszeleteknek. Ha a Σ nem párhuzamos egy alkotóval sem, és csak az egyik köpenyt metszi, akkor a síkmetszet ellipszis. Ha a Σ párhuzamos a körkúp egy a alkotójával, akkor a síkmetszet parabola. Σ-nak az a alkotóhoz tartozó ideális pontját tekinthetjük a parabola ideális pontjának, ahol a két parabolaág találkozik a "végtelenben". Végül, ha Σ mindkét köpenyt metszi akkor a síkmetszet hiperbola. Ekkor a Σ-val párhuzamos, origón áthaladó sík két alkotóban metszi a körkúpot. Ha b és c ez a két alkotó, akkor ezek párhuzamosak a hiperbola aszimptotáival, és a Σ-nak a b-hez és c-hez tartozó ideális pontjai az aszimptotáknak, és így a hiperbolának is ideális pontjai.

Lemma Tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli kúpszelet előáll az egységkörvonal projektív képeként.

Bizonyítás Tekintsük a $\Sigma_0 = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkot $\mathbb{R}^3$-ban, melyet $\mathbb{R}^2$-vel azonosítunk, és a $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletű körkúpot $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor Σ_0 az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű K egységkörvonalban metszi a körkúpot. Tetszőleges Σ_0-beli Γ kúpszelethez található olyan $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{o}$ sík, mely a körkúpot a Γ-val egybevágó kúpszeletben metszi. Miután ez a kúpszelet a K képe a Σ-ra vett középpontos vetítésnél, ezért Γ a K projektív képe. $\square$

Megjegyzés Tetszőleges adott $\mathbb{R}^2$-beli kúpszelet esetén, ha egy $P \in \mathbb{R}^2$ belső pont, akkor minden rajta áthaladó egyenes két pontban metszi a kúpszeletet. Továbbá ha a $P \in \mathbb{R}^2$ külső pont, akkor rajta keresztül pontosan két érintő húzható, és található P-n áthaladó, a kúpszeletet elkerülő egyenes. Ezek a tuladonságok abból következnek, hogy a kúpszelet előáll az egységkörvonal projektív képeként, és persze a körvonal esetén a tuladonságok egyszerűen beláthatóak.

8 Kúpszeletek egy közös származtatása

Tétel Adott L egyenesre, $F \notin L$ pontra, és $\varepsilon > 0$ számra, tekintsük azon pontok halmaza, melyek F-től és L-től való távolságának hányadosa ε. Ez a ponthalmaz ellipszis, ha $\varepsilon < 1$, parabola, ha $\varepsilon = 1$, és hiperbola, ha $\varepsilon > 1$, melyeknek F egy fókusza, és ε az ún. excentritása.

Bizonyítás Ha $\varepsilon = 1$, akkor a ponthalmaz parabola, tehát feltehetjük, hogy $\varepsilon \neq 1$. Vegyük fel úgy az (x, y) koordinátarendszert úgy, hogy $F = (0, 0)$, és L egyenlet $x = -d$ valamely $d > 0$-ra, azaz a ponthalmaz egyenlete $\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon|x + d|$. Négyzetreemlés a

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - 2\varepsilon^2 d\, x + y^2 = \varepsilon^2 d^2$$

egyenlethez vezet, azaz teljes négyzetre kiegészítve kapjuk, hogy

$$(1 - \varepsilon^2)\left(x - \frac{\varepsilon^2 d}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 d^2 + \frac{\varepsilon^4 d^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 d^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Tehát a ponthalmaz egyenlete

$$\frac{\left(x - \frac{\varepsilon^2 d}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\varepsilon^2 d^2/(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2 d^2/(1 - \varepsilon^2)} = 1.$$

Ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor $1 - \varepsilon^2 > 0$, és így a ponthalmaz ellipszis. Ha $\varepsilon > 1$, akkor $1 - \varepsilon^2 < 0$, így az y^2 együtthatója negatív, vagyis a ponthalmaz hiperbola. Mindkét esetben a féltengelyek hossza $\frac{\varepsilon d}{|1-\varepsilon^2|}$ és $\frac{\varepsilon d}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy F valóban fókusz. $\square$

9 Másodrendű görbék az affin síkban

Definíció Ha $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ valamelyike nem nulla, akkor azon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmazát, amelyek kielégítik a

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \omega = 0$$

egyenletet, $\delta, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$, másodrendű görbének hívjuk.

Tétel *(Főtengelytétel két változóban - lásd előző félév)* Egy $\bar{i}, \bar{j}$ ortonormált bázisban tekintsük az $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$ kifejezést az (x, y) pont függvényeként, ahol α, β, γ valamelyike nem nulla. Ekkor létezik olyan $\bar{i}', \bar{j}'$ ortonormált bázis, melyben $x\bar{i} + y\bar{j} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}'$ esetén

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = \alpha' x'^2 + \beta' y'^2, \quad \text{ahol } \alpha' \neq 0.$$

Megjegyzés Ha $\bar{i}$-t a $\bar{i}'$-be Θ szögű elforgatás viszi, akkor
$x = \cos\Theta x' - \sin\Theta y'$, és $y = \sin\Theta x' + \cos\Theta y'$.

Következmény Tetszőleges másodrendű görbe vagy egy kúpszelet, ilyenkor nem elfajulónak hívjuk, vagy pedig ún. elfajuló. Ez utóbbiak az egyenespár, egyetlen egyenes, egyetlen pont, vagy az üreshalmaz (ha nincs megoldás).
Bizonyítás Legyen az eredeti $\bar{i}, \bar{j}$ bázisban a pontrendszer egyenlete

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \omega = 0,$$

és legyen a Főtengely Tétel szerinti bázis $\bar{i}', \bar{j}'$. Mivel a helyettesítés lináris függvény, az új egyenlet

$$\alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \delta' x' + \varepsilon' y' + \omega' = 0,$$

ahol $\alpha' > 0$ (a (-1)-gyel való esetleges átszorzás után). Az $\alpha' x'^2 + \delta' x'$ teljes négyzetre való kiegészítésével adódik, hogy megfelelő φ értékre az egyenlet

$$\alpha'(x' + \varphi)^2 + \beta' y'^2 + \varepsilon' y' + \omega'' = 0.$$

Innentől különböző eseteket különböztetünk meg. Tegyük fel, $\beta' = 0$. Ha $\varepsilon' = 0$, akkor az üreshalmazt kapjuk $\omega'' > 0$ esetén, az $x' = -\varphi$ egyenest kapjuk $\omega'' = 0$ esetén, és két egyenest kapunk az $\omega'' < 0$ esetén. Ha $\beta' = 0$ mellett $\varepsilon' \neq 0$, akkor a $\alpha'(x' + \varphi)^2 = -\varepsilon'' y'' - \omega''$ parabolaegyenlet adódik.

Tegyük fel most $\beta'' \neq 0$. A $\beta' y'^2 + \varepsilon' y'$ teljes négyzetre való kiegészítésével adódik, hogy megfelelő ψ értékre az egyenlet

$$\alpha'(x' + \varphi)^2 + \beta'(y' + \psi)^2 = \tilde{\omega}.$$

Ha $\beta' > 0$, akkor ellipszist kapunk $\tilde{\omega} > 0$ esetén, az origót kapjuk $\tilde{\omega} = 0$ esetén, és az üreshalmazt kapjuk $\tilde{\omega} < 0$ esetén. Ha $\beta' > 0$, akkor hiperbolát kapunk $\tilde{\omega} \neq 0$ esetén, és egy egyenespárt kapunk $\tilde{\omega} = 0$ esetén. $\square$

Példa Tekintsük az $xy = 1$ egyenletű másodrendű görbét. Ha az új koordinátarendszerben az x' tengely az $y = x$ egyenletű egyenes (azaz $\Theta = \frac{\pi}{4}$), akkor az új egyenlet

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1,$$

tehát a görbe hiberbola.

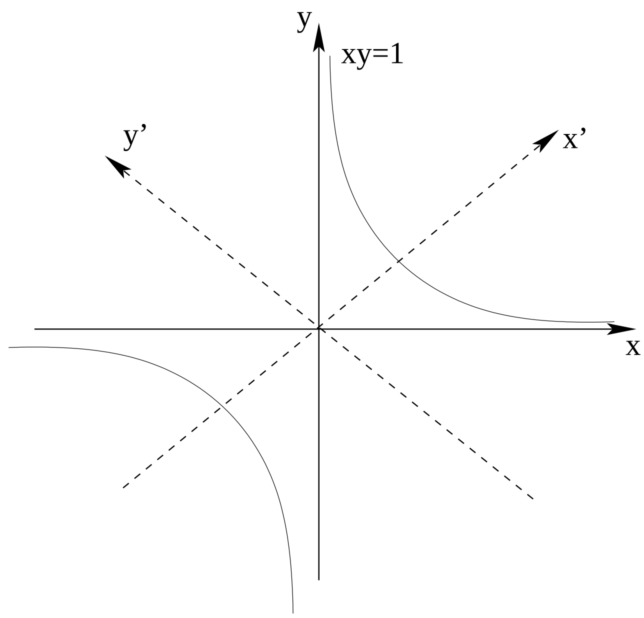

Figure 5:

10 Másodrendű görbék a projektív síkban

Definíció A valós projektív sík vektormodelljét használjuk. Ha az együtthatók valamelyike nem nulla, akkor az

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \omega yz = 0$$

egyenletet kielégítő (x, y, z) homogén koordinátájú pontok halmazát másodrendű görbének hívjuk a projektív síkon.

Az egyenlethez rendelt mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \delta/2 & \varepsilon/2 \\ \delta/2 & \beta & \omega/2 \\ \varepsilon/2 & \omega/2 & \gamma \end{bmatrix}.$$

A görbét nem elfajulónak hívjuk, ha $\det \mathcal{M} \neq 0$.

Megjegyzés 1. Tegyük fel, $\mathbb{R}^3$ eredeti $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ ortonormált bázisát lecseréljük egy $\bar{\imath}' = \mathcal{N}\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}' = \mathcal{N}\bar{\jmath}$ és $\bar{k}' = \mathcal{N}\bar{k}$ új ortonormált bázisra. Itt $\mathcal{N}$ ún. orthogonális mátrix, azaz $\mathcal{N}^T\mathcal{N} = \mathcal{I}$, ahol $\mathcal{N}^T$ transzponánlt, és $\mathcal{I}$ az identitás mátrix, így $(\det \mathcal{N})^2 = 1$. Ha $\mathcal{M}'$ az új bázisbeli egyenlet mátrixa, akkor $\mathcal{M}' = \mathcal{N}^T\mathcal{M}\mathcal{N}$, tehát

$$\det \mathcal{M}' = \det \mathcal{N} \cdot \det \mathcal{M} \cdot \det \mathcal{N} = \det \mathcal{M}.$$

Így ha a görbe nem elfajuló az egyik bázisban, akkor nem elfajuló marad tetszőleges más bázisban is.

Megjegyzés 2. *($\mathbb{R}^2$-beli és homogén egyenletek)* Azonsítsuk $\mathbb{R}^2$-t az $\mathbb{R}^3$-beli $\Sigma = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkkal, és tekintsük az $\mathbb{R}^2$-beli

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma + \delta xy + \varepsilon x + \omega y = 0$$

egyenletű másodrendű görbét. Miután $z \neq 0$ esetén a $[(x, y, z)]$ projektív síkbeli pont megegyezik a $[(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)]$ ponttal, ez pontosan akkor van rajta a görbén, ha

$$\alpha(\tfrac{x}{z})^2 + \beta(\tfrac{y}{z})^2 + \gamma + \delta(\tfrac{x}{z})(\tfrac{y}{z}) + \varepsilon(\tfrac{x}{z}) + \omega(\tfrac{y}{z}) = 0,$$

azaz

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \omega yz = 0.$$

Ez utóbbi a másodrendű görbe homogén egyenlete, mely pontosan akkor nem elfajuló, ha az eredeti $\mathbb{R}^2$-beli görbe sem elfajuló.

Tétel Bármely kúpszelet projektív képe ugyancsak kúpszelet.
Bizonyítás A kúpszelet homogén egyenlete nem elfajuló másodrendű egyenlet. Egy projektí transzformációt a homogén koordináták lineáris függvényeivel adjuk meg, így az új görbe egyenlete is másodrendű. Nem elfajuló másodrendű görbékről viszont az előző fejezetben láttuk, hogy kúpszeletek. □

Tétel *(Főtengelytétel három változóban)* Egy $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ortonormált bázisban tekintsük az $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \omega yz$ kifejezést az (x, y, z) pont függvényeként, ahol az együtthatók valamelyike nem nulla. Ekkor létezik olyan $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ortonormált bázis, melyben $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$ esetén

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \omega yz = \alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \gamma' z'^2.$$

Megjegyzés Az eredeti görbe pontosan akkor nem elfajuló, ha α', β', γ' egyike sem nulla.
Bizonyítás A két vátozós főtengely tétel miatt található olyan Θ_1 szög az $\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta xy$ függvényhez, hogy ha a $\bar{i}, \bar{j}$ bázist Θ_1-gyel elforgatjuk, az új bázisban eltűnik a vegyes szorzat. Tehát ha az $\bar{i}_1, \bar{j}_1$ vektorokat $\bar{i}, \bar{j}$-nek $\bar{k}$ körüli Θ_1 szöggel elforgatjuk, és $\bar{k}_1 = \bar{k}$, akkor az új bázisbeli koordinátákra $z_1 = z$, $x = \cos\Theta_1 \cdot x_1 - \sin\Theta_1 \cdot y_1$, és $y = \sin\Theta_1 \cdot x_1 + \cos\Theta_1 \cdot y_1$, és az új függvény

$$\alpha_1 x_1^2 + \beta_1 y_1^2 + \gamma_1 z_1^2 + \varepsilon_1 x_1 z_1 + \omega_2 y_1 z_1$$

alakú. Következőnek a $\bar{i}_1, \bar{k}_1$ vektorokat forgatjuk el $\bar{j}_1$ körül megfelelő Θ_2 szöggel, hogy eltüntessük az $x_1 z_1$ tagot, így az új $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$ ortonormált bázisban koordinátákra $y_2 = y_1$, $x_1 = \cos\Theta_2 \cdot x_2 - \sin\Theta_2 \cdot z_2$, és $z_1 = \sin\Theta_2 \cdot x_2 + \cos\Theta_2 \cdot y_2$, és az új függvény

$$\alpha_2 x_2^2 + \beta_2 y_2^2 + \gamma_2 z_2^2 + \omega_2 y_2 z_2$$

alakú. Végül a keresett bázist a $\bar{j}_2, \bar{k}_2$ vektorok $\bar{i}_2$ körül megfelelő Θ_3 szögű elforgatásával adódik. □

Tétel Bármely kúpszelet az $\mathbb{R}^2$-beli egységkörvonal projektív képe.
Megjegyzés Másszóval bármely két kúpszelet gymás projektív.
Bizonyítás Azonsítsuk $\mathbb{R}^2$-t az $\mathbb{R}^3$-beli $\Sigma = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkkal, és tekintsük benne a Γ kúpszeletet, amely egy nem elfajuló másodrendű görbe a projektív síkon. A három vátozós főtengely tétel miatt található olyan $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ortonormált bázis, melyben a Γ homgén egyenlete

$$\alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \gamma' z'^2 = 0,$$

ahol α', β', γ' egyike sem nulla. Ha α', β', γ' együtthatóknak mind ugyan az előjele, akkor a baloldal vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív tetszőleges $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \backslash (0, 0, 0)$ esetén, így a kúpszeletnek nem volna pontja. Tehát az α', β', γ' együtthatók kózúl kettő azonos előjelű. A koordinátatengelyek cseréjével elérhető, hogy $\alpha', \beta' > 0$ és $\gamma' < 0$, tehát $|\gamma'|$-nel való osztás után az egyenlet

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - z'^2 = 0$$

alakba írható, $a, b > 0$. Másszóval a $\Sigma' = \{x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + \bar{k}' : x', y' \in \mathbb{R}^2\}$ síkban a Γ egyenlete

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Tehát először alkalmazunk egy a Σ-beli egységkörvonalat a Σ-beli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű Γ_0 ellipszisbe vivő affinitást, másodszor alkalmazunk az $\mathbb{R}^3$ egy egybevágóságát, mely Σ-beli Γ_0 ellipszist a Σ'-beli Γ-nak megfelelő $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisbe viszi, végül pedig alkalmazzuk a Σ'-t Σ-ba képező középpontos vetítést. Így kompozíció egy az egységkörvonalat Γ-ba vivő projektív transzformáció. $\square$

11 Polaritás

11.1 Polaritás az egységkörvonalra

Definíció Legyen Q az $\mathbb{R}^2$ origója, és legyen K a Q középpontú egységsugarú körvonal. Egy tetszőleges valós projektívsíkbeli A külső pont polárisa a K-ra vonatkozóan az az a egyenes, mely az A-ból a K-hoz húzott két érintő E_1 és E_2 érintési pontján megy át. Ha $A \in K$, akkor A polárisa K-ra vonatkozóan az A-beli érintőegyenes.

Vegyük észre, hogy ha A ideális pont, például a g egyenes ideális pontja, akkor E_1 és E_2-beli érintők párhuzamosak g-vel, és a a Q-n áthaladó, g-re merőleges egyenes. Ha pedig $A \in \mathbb{R}^2$ a külső pont, és az A, E_1 és E_2 helyvektorai $\mathbb{R}^2$-ben $\bar{a}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, akkor $\bar{a} \cdot \bar{e}_i = 1$, $i = 1, 2$, hiszen $\bar{a} - \bar{e}_i$ merőleges $\bar{e}_i$-re, vagyis $0 = (\bar{a} - \bar{e}_i) \cdot \bar{e}_i = \bar{a} \cdot \bar{e}_i - \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \bar{a} \cdot \bar{e}_i - 1$. Tehát az A polárisa ebben az esetben az $\bar{a} \cdot \bar{p} = 1$ egyenletű egyenes, ahol $\bar{p}$ az egyenes tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli pontjának helyvektora. Hasonlóan a poláris egyenlete $\bar{a} \cdot \bar{p} = 1$ akkor is, ha $A \in K$. Vegyük észre, hogy A akár ideális, akár $\mathbb{R}^2$-beli külső pont, akár $A \in K$, az A polárisa merőleges az AQ egyenesre.

Végül, ha A a K belső pontja, akkor A polárisa K-ra vonatkozóan az összes külső P pont halmaza, melyek polárisa átmely A-n. Abban az esetben, ha $A = Q$, akkor a poláris az ideális egyenes. Abban az esetben, ha $A \neq Q$ belső pont, akkor a poláris tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli pontjának $\bar{p}$ helyvektorára $\bar{a} \cdot \bar{p} = 1$, tehát ez a poláris egyenlete. Miután ez az a egyenes merőleges az AQ egyenesre, az a ideális pontjának polárisa is át megy A-n, azaz A polárisa az a egyenes a valós projektív síkon.

Megfordítva, a valós projektív sík tetszőleges a egyenes polárisa K-ra vonatkozóan az az A pont, melynek polárisa a.

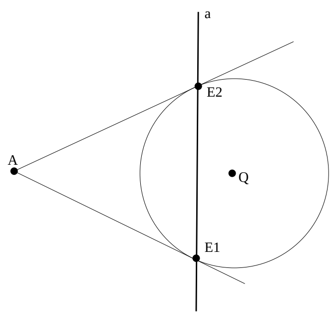

Figure 6:

Megjegyzés Az egységkörvonalra vonatkozó polaritást úgy definiáltuk, hogy ha az A pont illeszkedik a b egyenesre a valós projektív síkon, akkor az A polárisa tartalmazza a b polárisát. Ebből következik, hogy ha $A \neq B$ pontok a valós projektív síkon, akkor AB egyenes polárisa az A és B polárisának metszete.

11.2 Polaritás egy kúpszeletre vonatkozóan

Definíció Adott a valós projektív síkon egy Γ kúpszelet. Ekkor létezik olyan Φ projektív transzormáció, mely Γ-t a K az $\mathbb{R}^2$-beli egységsugarú körvonalba viszi. Ha A egy valós projektív síkbeli pont, akkor A polárisa Γ-ra vonatkozóan az az a egyenes, melyre a ΦA polárisa K-ra vonatkozóan a Φa egyenes. Megfordítva, a valós projektív sík tetszőleges a egyenes polárisa Γ-ra vonatkozóan az az A pont, melynek polárisa a.

A K-ra vonatkozó polaritás fenti tulajdonságaiból következnek a Γ-ra vonatkozó polaritás alábbi tulajdonságai, melyek azt is mutatják, hogy a definíció nem függ attól, melyik a Γ-t a K-ba vivő Φ projektív transzormációt választjuk.

Megjegyzés 1. Ha A a Γ-hoz képest külső pont, akkor A polárisa a Γ-ra vonatkozóan az az egyenes, mely az A-ból a Γ-hoz húzott két érintő érintési pontján megy át. Ha $A \in \Gamma$, akkor A polárisa Γ-ra vonatkozóan az A-beli érintő. Végül, ha A a Γ-hoz képest belső pont, akkor A polárisa Γ-ra vonatkozóan az az egyenes, mely az összes külső pontból áll, melyek polárisa átmely A-n.

Megjegyzés 2. Ha az A pont illeszkedik a b egyenesre a valós projektív síkon, akkor az A polárisa a Γ-ra vonatkozóan tartalmazza a b polárisát. Továbbá, ha $A \neq B$ pontok a valós projektív síkon, akkor AB egyenes polárisa a Γ-ra vonatkozóan az A és B polárisának metszete.

Tétel Ha Γ egy a valós projektív síkbeli kúpszeletet egy szelője $A, B \in \Gamma$, $A \neq B$ pontokban metsz, és az AB szelő egy A, B-től különböző, a projektív síkon fekvő C pontjának a Γ-ra vonatkozó polárisa D-ben metszi a szelőt, akkor $(ABCD) = -1$.
Bizonyítás Legyen P az A és B-beli érintők metszéspontja. Mivel P külső pont, választhatunk egy e_∞ egyenest P-n keresztül, mely elkerüli Γ-t. Ágyazzuk be $\mathbb{R}^2$-t a valós projektív síkba úgy, hogy e_∞ a végtelen távoli egyenes, tehát az A és a B-beli érintők párhuzamosak. Továbbá Γ-nak nincs végtelen távoli pontja, ezért Γ ellipszis. Legyen Φ egy olyan affin transzformáció, mely Γ-t az $\mathbb{R}^2$-nek a Q középpontú K egységkörvonalába viszi, ahol Q az $\mathbb{R}^2$-beli origó. Jelöljük egy pont Φ általi képét $'$-vel, és A', B', C', D' $\mathbb{R}^2$-beli helyvektorát $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}', \bar{d}'$-vel. Miután az A' és a B'-beli érintők párhuzamosak, felvehetjük úgy a koordinátarendszert $\mathbb{R}^2$-ben, hogy $A'(1,0)$, $B'(-1,0)$, $C'(t,0)$, $D'(1/t,0)$ megfelelő $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$-re. Tehát

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{t-1}{t-(-1)} : \frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}-(-1)} = \frac{t-1}{t+1} : \frac{1-t}{1+t} = -1. \quad \square$$

Megjegyzés Tetszőleges kúpszeletre vett polaritás megvalósítja a dualitás elvét azzal a plussz tulajdonsággal, hogy a kúpszelet érintőjének duálisa az érintési pont.

12 Brianchon tétel és Pascal tétel

(Hajós könyv, 48.3-4, 501-511. oldal)

Tétel (Brianchon tétel) Legyenek az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ egyenesek egy kúpszelet érintői, és legyen Q_{ij} az i és j egyenes metszéspontja $i \neq j$-re. Ekkor a $Q_{12}Q_{45}$, $Q_{23}Q_{56}$ és $Q_{34}Q_{61}$ egyenesek egy ponton mennek át.
Megjegyzés Ha csak öt érintőegyenes $1, 2, 3, 4, 5$ adott, akkor a tétel igaz marad, ha a P_{56} pont az 5 egyenes érintési pontja.

Tétel (Pascal tétel) Legyenek az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ egy kúpszelet pontjai, és legyen e_{ij} az i és j pontok egyenese $i \neq j$-re. Ekkor az e_{12} és e_{45} metszéspontja, az e_{23} és e_{56} metszéspontja, és az e_{34} és e_{61} metszéspontja egy egyenesre illeszkedik.
Megjegyzés Ha csak öt $1, 2, 3, 4, 5$ pont adott, akkor a tétel igaz marad, ha az e_{56} egyenes az 5-beli érintő.

Megjegyzés A Brianchon tétel és Pascal tétel egymás polárisai a megfelelő kúpszeletre, így például elég egyiket bizonyítani.

Megjegyzés A Papposz tétel a Pascal tétel "határértékének" is tekinthető. Egy projektív transzformáció után feltehetjük, hogy A_1, A_2, A_3 az $\mathbb{R}^2$-beli első koordinátatengelyen, és B_1, B_2, B_3 a második koordinátatengelyen fekszik. Kis $\varepsilon > 0$-ra legyenek $1, 5, 3$ az $xy = \varepsilon$ hiperbola azon pontjai, melyek első koordinátái megegyeznek az A_1, A_2, A_3 első koordinátáival, és $4, 2, 6$ az $xy = \varepsilon$ hiperbola azon pontjai, melyek második koordinátái megegyeznek a B_1, B_2, B_3 második koordinátáival. Így ha ε tart a 0-hoz, akkor e_{12} és e_{45} metszéspontja A_1B_2 és A_2B_1 egyenesek metszéspontjához tart, míg e_{23} és e_{56} metszéspontja A_2B_3 és A_3B_2 metszéspontjához, és e_{34} és e_{61} metszéspontja A_1B_3 és A_3B_1 metszéspontjához.

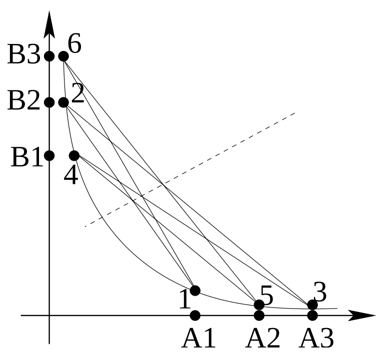

Figure 7:

13 Projektív tér és Másodrendű felületek

Definíció (Valós projektív tér) A valós projektív teret, $P\mathbb{R}^3$-t homogén koordinátákkal adjuk meg. Pontjai $\mathbb{R}^4 \backslash (0,0,0,0)$ ekvivalenciaosztályai. Itt $[(x,y,z,w)]$ és $[(x',y',z',w')]$ pontok megegyeznek, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}\backslash 0$, melyre $x = \lambda x'$, $y = \lambda y'$, $z = \lambda z'$ és $w = \lambda w'$.

Ha (x_1, y_1, z_1, w_1) és (x_2, y, z_2, w_2) $\mathbb{R}^4$-beli független vektorok, akkor az

$$[s \cdot (x_1, y_1, z_1, w_1) + t \cdot (x_2, y, z_2, w_2)], \quad s, t \in \mathbb{R}, \text{ és } (s,t) \neq (0,0),$$

projektív térbeli pontok egy projektív térbeli egyenest szolgáltatnak. Másszóval

$$[(x_1 + t \cdot x_2, y_1 + t \cdot y_2, z_1 + t \cdot z_2, w_1 + t \cdot w_2)], \quad t \in \mathbb{R},$$

projektív térbeli pontok a projektív térbeli egyenes $[(x_2, y, z_2, w_2)]$-től különböző pontjai.

Tetszőleges $\mathcal{M}$ nem nulla determinánsú 4×4-es mátrix meghatároz egy projektív transzformációt, mely az $[(x,y,z,w)]$ projektív pontot az $[\mathcal{M}(x,y,z,w)]$ pontba viszi. Egy a tér projektív transzformációja kollineáció, azaz egyenest egyenesbe visz.

Megjegyzés (Valós projektív tér, mint az affin tér kibővítése) Az $\mathbb{R}^3$ affin teret az $\mathbb{R}^4$-ben a $\{(x,y,z,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ halamzzal azonsíthatjuk. Így $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \backslash (0,0,0,0)$ esetén, a projektív térbeli $[(x,y,z,w)]$ pont végtelen távoli ideális pont, ha $w = 0$, és az $\mathbb{R}^3$-beli $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w})$ pontnak felel meg, ha $w \neq 0$. Továbbra is fennáll, hogy $\mathbb{R}^3$-beli párhuzamos egyeneseknek egybeesik ideális pontjuk.

Definíció (Másodrendű felületek a valós projektív téren) Ha az együtthatók valamelyike nem nulla, akkor az

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta w^2 + \varepsilon xy + \omega xz + \eta xw + \varrho yz + \varphi yw + \psi zw = 0$$

egyenletet kielégítő $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \backslash (0,0,0,0)$ homogén koordinátájú pontok halmazát másodrendű felületnek hívjuk a projektív téren. Az egyenlethez rendelt mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon/2 & \omega/2 & \eta/2 \\ \varepsilon/2 & \beta & \varrho/2 & \varphi/2 \\ \omega/2 & \varrho/2 & \gamma & \psi/2 \\ \eta/2 & \varphi/2 & \psi/2 & \delta \end{bmatrix}.$$

A felületet nem elfajulónak hívjuk, ha $\det \mathcal{M} \neq 0$. Ilyenkor a felület nem elfajuló másodrendű felület marad akkor is, ha $\mathbb{R}^4$ egy tetszőleges másik orthogonális bázisában írjuk fel az egyenletét.

Másodrendű felületek osztályozása a valós projektív téren Négy változóban is teljesül a főtengely tétel. E szerint tetszőleges másodrendű felülethez található orthogonális bázis $\mathbb{R}^4$-ben, hogy ebben az egyenlet

$$\alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \gamma' z'^2 + \delta' w'^2 = 0.$$

Ha a felület nem elfajuló, akkor $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ egyike sem nulla. Nem lehet minden együttható azonos előjelű (hiszen akkor nem lenne $(0,0,0,0)$-tól különböző megoldás), tehát az együtthatók közül vagy három együttható előjele megegyezik, és a negyedik ellentétes, vagy kettő együttható pozitív, kettő negatív. Így a koordinátatengelyek cseréjével elérhető, hogy az egyenlet vagy

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - \frac{w'^2}{d^2} &= 0, \quad \text{vagy} \qquad (1) \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} - \frac{w'^2}{d^2} &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

alakú, ahol $a, b, c, d > 0$. Másrészt a fenti két felület megkapható az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - w^2 &= 0 \quad \text{vagy} \\ x^2 + y^2 - z^2 - w^2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletű felületekből az $\mathcal{M}(x, y, z, w) = (ax, by, cz, dw)$ által meghatározott pojektív transzformáció segítgével. Itt $\mathbb{R}^3$-ban (mikor $w = 1$), az első felület az $x^2+y^2+z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület, a második felület az $x^2+y^2-z^2 = 1$ egyenletű egyköpenyű hiperboloid. Tehát tehát bármely másodrendű felület vagy a gömbfelület, vagy az egyköpenyű hiperboloid projektív képe.

Másodrendű felületek $\mathbb{R}^3$-ban Ha a másodfokú tagok valamelyikének együtthatója nem nulla, akkor az

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta + \varepsilon xy + \omega xz + \eta x + \varrho y + \varphi y + \psi z = 0$$

egyenletet kielégítő $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$ koordinátájú pontok halmazát másodrendű felületnek hívjuk a projektív téren. A kapcslód'o homogén egyenlet a valós projektív téren

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z^2 + \varepsilon xy + \omega xz + \eta xw + \varrho yz + \varphi yw + \psi zw = 0.$$

Az $\mathbb{R}^3$-beli felületet nem elfajulónak hívjuk, ha a valós projektív téren kapott felület is az.

Az $\mathbb{R}^3$-beli nem elfajuló másodrendű felületek A három változós főtengely tétel segítségével belátható, hogy bármely $\mathbb{R}^3$-beli nem elfajuló másodrendű felülethez található olyan koordinátarendszer, melyben egyenlet a következőek valamelyike:

Ellipszoidfelület

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ahol $a, b, c > 0$ a féltengelyek. Ha $a = b = c = r$, akkor az r sugarú gömbfelület. Nyilván a gömbfelület projektív (sőt affin) képe ((1) tipusú).

Kétköpenyű hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Homogén egyenlete $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - w^2 = 0$, tehát (1) tipusú, azaz a gömbfelület projektív képe.

Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Homogén egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - zw = 0$. Itt a z és w koordinátatengelyeit elforgatva az egyenlet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2} = 0$$

alakba írható (lásd a korábbi példát). Tehát a paraboloid is (1) tipusú, azaz a gömbfelület projektív képe.

Egyköpenyű hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Homogén egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - w^2 = 0$, tehát (2) tipusú.

Nyeregfelület

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Homogén egyenlete $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - zw = 0$. Itt a z és w koordinátatengelyeit elforgatva az egyenlet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2} = 0$$

alakba írható. Tehát a nyeregfelület (2) tipusú, azaz egyköpenyű hiperboloid projektív képe.

Tétel Egy egyköpenyű hiperboloid vagy egy nyeregfelület bármely pontján át húzható a felületen fekvő egyenes.

Bizonyítás Ahogy fentebb láttuk, ezek a felületek az

$$x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$$

homogén egyenletű egyköpenyű hiperboloid projektív képei, tehát elég erre bizonyítani az állítást.

Tegyük fel, $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{R}^4 \setminus (0,0,0,0)$ kielégíti az egyenletet, azaz $[(x_0, y_0, z_0, w_0)]$ az egyköpenyű hiperboloid egy pontja. Az egyenletből adódik, hogy $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ és $(z_0, w_0) \neq (0,0)$, tehát az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(x_0, y_0, z_0, w_0), \quad \text{és} \quad (y_0, -x_0, w_0, -z_0)$$

vektorok függetlenek. Az

$$[(x_0 + t \cdot y_0, y_0 - t \cdot x_0, z_0 + t \cdot w_0, w_0 - t \cdot z_0)], \quad t \in \mathbb{R},$$

egyenes pontjainak homogén koordinátáira

$$(x_0 + t \cdot y_0)^2 + (y_0 - t \cdot x_0)^2 - (z_0 + t \cdot w_0)^2 - (w_0 - t \cdot z_0)^2 = (1 + t^2)(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - w_0^2) = 0,$$

azaz az egyenes a felületen fekszik. $\square$