

## RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET

Cím: 1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15.

Postafiók címe: 1364 Budapest, Pf. 127

telefonszám: (1) 483 8300

honlap: <https://www.renyi.hu>

e-mail: [math@renyi.hu](mailto:math@renyi.hu)

### I. A kutatóintézet kutatási eredményei 2021-ben

#### Digitalizáció

#### Tématerület: (A) Algebrai irányú kutatások

A Leavitt-útalgebrák kutatása az utóbbi 15 évben lett a gyűrűelmélet kedvelt témája. Eredete W.G. Leavitt modulus-típussal kapcsolatos ötvenes évekbeli munkáiban található, illetve ettől függetlenül húsz évvel később az operátoralgebrák elméletében megjelent Cunz-algebrák analitikus módszerekkel való vizsgálatai ihlették a gyűrűelméleteket a mindkettőt magába foglaló tisztán algebrai elmélet megalkotására. A 2021-ben megjelent cikkükben sikerült osztályozniuk tetszőleges irányított gráfhoz tartozó Leavitt-útalgebra irreducibilis reprezentációit. Az irreducibilis reprezentációkat a megfelelő gráfalgebra projektív részmodulusai faktorainak direkt limeszeként konstruálták meg. Meghatározták az irreducibilis modulusok definiáló relációit is. Ebből kritériumokat kaphatnak annak eldöntésére, hogy egy adott irreducibilis reprezentáció véges dimenziós vagy végesen prezentált-e. Leavitt-útalgebrákra vonatkozó kutatásaikat Rosenmann és Rosset egy eredeti gondolatának továbbfejlesztésével folytatták. Megmutatták, hogy a klasszikus Leavitt-útalgebra jobboldali hányadosgyűrűje az egységelemes szabad aszociatív algebrának az 1-kodimenziós ideálok hatványai által definiált Gabriel-féle topológiára vonatkozóan. Ezáltal egy fogalmilag tiszta, változó választásától független leírását kapták a klasszikus Leavitt-útalgebrának. A módszer alkalmazásaként rövid és könnyen átlátható bizonyítását kapták annak, hogy véges gráfhoz tartozó Leavitt-útalgebra hányadosgyűrűje a megfelelő gráfalgebrának az élek és nyelők által generált ideálok hatványai által megadott Gabriel-féle topológiára nézve [A1].

Egy algebra által kielégített polinomazonosságok kvantitatív leírásához használt jellemző az úgynevezett kokarakter sor. A legkisebb egyszerű Lie-algebra reprezentációit által kielégített polinomazonosságok kokarakter sora sokáig csak a 2-dimenziós irreducibilis reprezentációra volt ismert. Egy korábbi munkájukban kiszámolták a kokarakter sort a 3-dimenziós irreducibilis reprezentációra. Ezekben az esetekben a kokarakter sorban szereplő multiplicitások korlátosak. Sikerült bizonyítaniuk, hogy ez a jelenség a legkisebb egyszerű Lie-algebra tetszőleges irreducibilis reprezentációja esetén fennáll, azaz megadtak egy csak a reprezentáció dimenziójától függő korlátot a kokarakter sorban szereplő multiplicitásokra. A bizonyításban kulcsszerepet játszik egy klasszikus invariánselmélettel való kapcsolat, ennek további vonatkozásait kidolgozták [A2].

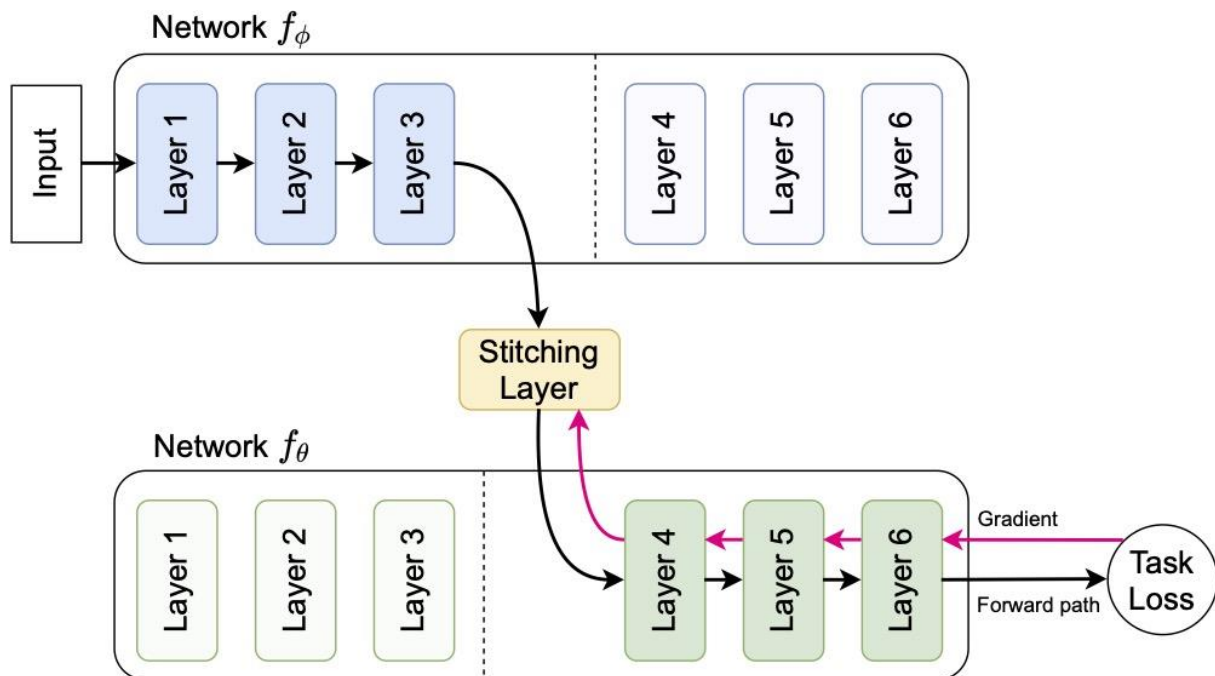
Belátták Ghys ismert sejtését, mely szerint egy  $M$  kompakt sokaságon ható véges csoportnak van  $f(M)$  indexű nilpotens részcsoportja. A bizonyítás körülbelül fele – egy lényeges, kissé technikai állítás – egy külföldi társszerzővel közös preprintben található [A3]. Sikerült a primitív permutációcsoportokra vonatkozó nevezetes Sims-sejtés egy olyan új bizonyítását megadni, amely csak a véges egyszerű csoportok alapvető elméletére épül [A4]. Majdnem teljesen befejezték a lineáris csoportok nem növe halmazait leíró Helfgott–Lindenstrauss-sejtést. Hiányzik még a leírásban szereplő egyik részcsoport normalitása, ezen még dolgoznak [A5].

Új elfajulási eredményeket adtak magasabb homológia torziócsoporthoz növekedésre bizonyos aritmetikus rácsokra, Artin-csoportokra és mapping class csoportokra. Fő kongruencia részcsoporthoz esetében erős aszimptotikus korlátokat is adtak a torzió növekedésre. A központi eszköz egy új homotópius módszer, amit effektív újjáépítésnek neveztek el, ez kis klasszifikáló tereket konstruál, miközben kontrol alatt tartja a homotópiát [A6].

## Digitalizáció

### Tématerület: (B) Alkalmazott matematikai kutatások

A mesterséges intelligencia alapkutatás területén, a magasabb rendű Fourier-analízis, illetve a hálózatelmélet területén születtek a legfontosabb eredmények. A neurális hálózatokban létrejövő adat reprezentációk tanulmányozása kulcsfontosságú a mélytanuláshoz kapcsolódó modellek fejlesztésében, és nagymértékben hozzájárul a mélytanulás jobb elméleti megértéséhez. Ezért a Rényi Intézetben kiemelt szerepet kap az úgynevezett látens reprezentációk kutatása. Az egyik ehhez kapcsolódó projektük a neuronhálós reprezentációk hasonlósága és összeilleszthetősége. Ennek keretében új nézőpontot adtak mély neurális hálózatok reprezentációs hasonlósági fogalmainak elemzésére. Megközelítésük alapja egy Dr. Frankenstein névre keresztelt eszközkészlet, amellyel arra törekednek, hogy „összevarrjanak” két betanított neurális hálózatot egy „összefércelő” (stitching) réteggel úgy, hogy az még mindig egy jól működő rendszert eredményezzen. Elemzésük azon empirikus megfigyelésen alapszik, hogy ez lehetséges: azonos architektúrájú, de eltérő inicializációjú mély konvolúciós neurális hálózatokban megjelenő belső reprezentációk meglepően nagy pontossággal illeszthetők így össze, akár egyetlen affin összefércelő réteggel is. Az összefércelő rétegben létrejött transzformációk elemzésével megállapításokat tettek arról, hogyan hasonlóak a neuronhálós reprezentációk, és reflektáltak a reprezentációs hasonlósági fogalmakkal kapcsolatos jelenlegi kutatásokra (1. ábra).



1. ábra: Egy hálózat sematikus rajza

A magasabb rendű Fourier-analízis területén két új cikket is publikáltak [B1], [B2]. Ezen cikkek fő témája a  $p$ -karakterisztikájú vektortereken definiált Gowers-normák vizsgálata, illetve a  $p$ -exponensű Abel-csoportokhoz tartozó dinamikus rendszerek karakterisztikus faktorainak leírása. Ezen dinamikus rendszerekre új struktúratételeket bizonyítottak és igazolták az Abramov-sejtés új eseteit. A módszerük új algebrai struktúrák bevezetésére alapul, amelyeket  $p$ -homogén nilspace-eknek neveznek. Kiderül, hogy a fenti kérdéskör teljesen visszavezethető a  $p$ -homogén nilspace-ek algebrai tulajdonságainak vizsgálatára. A járványterjedésről írt [B3] cikk fontos új módszert adott a switchover jelenség leírásával.

Bevezették az ún. fokszámsorozat-tartó gráf-növekedés fogalmát: a valós hálózatokban az élek fenntartásának gyakran nem elhanyagolható költsége van, és ilyenkor a foksámok nem növekedhetnek korlátlanul (pl. emberi kapcsolatok száma), adott esetben akár rögzítettek (pl. atomok szabad gyökeinek száma) [B4]. Ezért arra az axiómára építettek fel egy növekedési modellt, hogy a gráfhoz már korábban adott csúcsok fokszáma nem változik későbbi csúcsok érkezésekor. A modell a látszólagos megszorítottsága ellenére képes a legtöbb valós életből vett gráf előállítására.

Egy multidiszciplináris, társadalomtudományokat is érintő kutatásban kollégáik egy 2012 és 2015 között épített több százezer fős Twitter-felhasználók adatbázisát vizsgálták az Egyesült Államok 50 legnépesebb agglomerációjában. A reggeli, esti és napközbeni leggyakoribb posztolási helyek alapján otthoni és munkahelyet, átlagos ingázási időt és területi népszámlálási adatok alapján átlagjövedelmet rendeltek az egyes felhasználókhoz. A különböző távolságokra ingázó emberek közötti egyéni hálózati mutatók összehasonlításával azt találták, hogy a hosszú ingázás a tranzitivitás alacsonyabb szintjével jár, vagyis a barátok barátai kevésbé ismerik egymást, és a barátok közötti jövedelmi sokféleség magasabb. Eredményeik egyetemes kapcsolatot sugallnak az ingázás és a különböző társadalmi hálózatok integrációja között, megmutatják, hogy a hosszabb ingázás mérhető, bár mérsékelt hatással van a sokszínű és kevésbé szegregált társadalmi kapcsolatok kialakulására [B5].

## Digitalizáció

### Tématerület: (C) Analitikus és aritmetikus módszerek

Fuglede híres fél évszázados problémáját az euklideszi tér parkettázásainak és a lehetséges parketták egy Fourier-analitikus leírásának ekvivalenciájáról (miután 2004-ben a Fields-érmes Tao megmutatta, hogy a válasz általában negatív) igenlően válaszolták meg tetszőleges dimenziós konvex testekre [C1]. Folytatták fraktál-geometriai kutatásaikat. Megmutatták, hogy tetszőleges Mandelbrot-perkolációban létezik olyan 0 és 1 közötti  $\alpha$  küszöbérték, amely feletti tetszőleges  $\beta$  paraméterre a limesz-halmaz tisztán  $\beta$ -rektifikálhatatlan. A  $d$ -dimenziós egységkocka homeomorfizmus-csoportjában vizsgáltak tipikus és prevalens tulajdonságokat. Megválaszolva Mycielski kérdését, igazolták, hogy a prevalens homeomorfizmus szinguláris, azaz nullmértékű halmazt teljes mértékűbe visz.

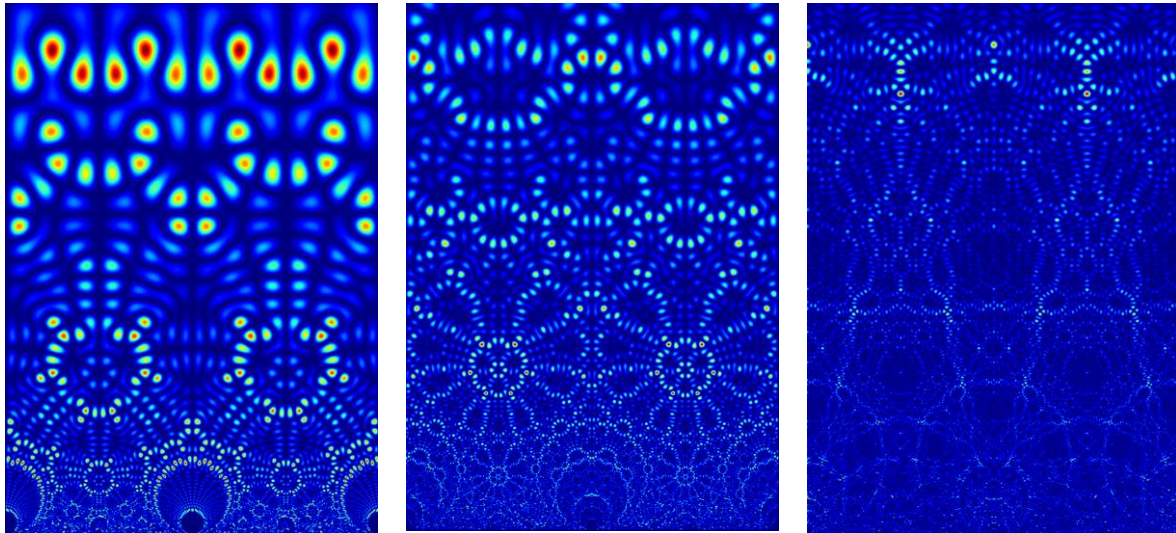
Egy több mint egy évtizedes kvantum-információelméleti sejtést igazolva megmutatták, hogy a kvantum Jensen–Shannon-divergencia gyöke valódi metrika az állapotterén [C2].

Befektetések új törvényszerűségeit tárták fel olyan árfolyamatokra, melyek hosszútávú középértékük körül ingadoznak (pl. nemesfémek, nyersanyagok árai) [C3]. Véletlen közegben mozgó Markov-láncokra vonatkozó ergodikus tételeket alkalmaztak sorbanállási rendszerekre, valamint a gépi tanulás egyes nem-konvex optimalizációs algoritmusaira. Sztochasztikus evolúciós egyenletek operátorfélcsoport-elméleti megközelítésével véges hálózat élein vizsgálták Gauss-féle zajjal perturbált reakció-diffúziós egyenleteket.

Folytatták a statisztikus fizika invariancia-elveivel (Lorentz-gáz), illetve Markov-láncok keverési idejével kapcsolatos kutatásaikat is. Egy végtelen állapotterű eredmény, hogy egy „véges energiájú” véletlen közeg is elronthatja az alaptér geometriai expanziós tulajdonságait. A Markov-láncok keverésének egy finomabb megértését célozza a függvények zajérzékenységének és ritka rekonstruálhatóságának a vizsgálata, melyet a hagyományos Fourier-analitikus megközelítésen túl entrópia-egyenlőtlenségekhez és kooperatív játékelmélethez kapcsolnak. Csoportokra és véletlen gráfokra konstruáltak invariáns véletlen beágyazásokat euklideszi és hiperbolikus terekbe, többek között megcáfolva Benjamini egy természetes sejtését [C4]. Nem-független perkolációs modellek fázisátmeneteiről és független bitekkel való reprezentálásáról is bizonyítottak eredményeket.

Számelméleti kutatásaikban a nevezetes Goldbach-sejtés különféle közelítéseit dolgozták ki. A több évtizeden át fennállt, osztók számával összefüggő Erdős–Mirsky-sejtés messzemenő erősítését bizonyították. Véges testek feletti affin síkon értelmezett függvényekre és azok Fourier-transzformáltjára vonatkozó határozatlansági egyenlőtlenségeket igazoltak [C5].

Hatékony becsléseket adtak az  $SL(2, \mathbb{C})$  csoport automorf formáira a súly-aspektusban, illetve közel optimális becsléseket a  $GL(n, \mathbb{R})$  csoport Kloosterman-összegeire (2. ábra). Kiterjesztették Hurwitz kvadratikus alakokra vonatkozó osztályszámformuláját az indefinit esetre [C6], illetve hasonló formulákat dolgoztak ki köbös alakokra és Hermite-alakokra. Alkalmazásként meghatározták bizonyos többváltozós zeta-függvények speciális értékeit. Végezetül általánosították a  $p$ -adikus Galois-csoportok direkt szorzatainak reprezentációira vonatkozó korábbi eredményeiket, és egyben új kontextusba helyezték a Scholze perfektoid tereire vonatkozó Künneth-formula (Drinfeld-lemma) segítségével.



2. ábra: Hecke-Maass automorf formák (Fredrik Strömberg ábrája)

## Digitalizáció

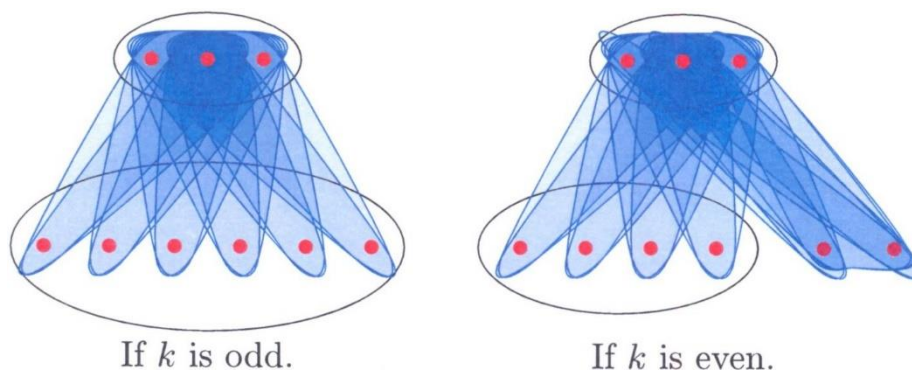
### Tématerület: (D) Diszkrét matematikai problémák

A világhírű diszkrét matematika műhelyben 2021-ben is folytatták a magas színvonalú kutatásokat. Mindenekelőtt a hipergráfok elméletében sikerült áttörő eredményeket elérni. Egy  $r$ -uniform hipergráf nagyságának becslésekor első lépésként redukálható egy  $r$ -osztályú hipergráffá az alapvető fontosságú Erdős–Kleitman-lemma segítségével. Ugyanakkor ismert, hogy hasonló redukció rendezett hipergráfokra nem lehetséges. Most külső kutatókkal együttműködve mégis találtak egy lehetőséget, belátták, hogy az  $r$ -uniform eset redukálható bizonyos  $(r-1)$  osztályú hipergráfok vizsgálatára [D1]. Ez egy komoly áttörés az elméletben, ami ugyanolyan hasznos eszköznek ígérkezik, mint a klasszikus Erdős–Kleitman-lemma.

Véges halmazrendszerek fontos paramétere a bizonyos lefedett halmazok száma, azaz az „árnyék” mérete. Megvizsgálták, hogy metsző halmazrendszerek árnyékai milyen extrém értékeket vehetnek fel, és belátták a lehető legjobb aszimptotikus becsléseket, amivel régi kérdésre sikerült pontot tenni [D2].

Egy alapkérdés Turán-típusú problémákban, hogy milyen függvény lehet az extrémális függvény. A Ruzsa–Szemerédi (6,3)-tétel az első példa volt arra, hogy legalábbis 3-uniform esetben, már két tiltott részhipergráf esetén is előfordulhat hogy a Turán-függvény növekedése nem írható le polinommal. Erdős kérdezte, hogy ugyanez vajon megvalósítható egyetlen tiltott részstruktúra esetén is. Korábban ezt egy 5-uniform rendszer konstruálásával válaszolták meg, amit most minden  $r$ -uniform esetre általánosítottak, ha  $r$  legalább 5 [D3]. A konstrukció algebrai, a felső becslések pedig a kvázirandom struktúrák egyik leghaladottabb eszközét használja, a hipergráf regularitási lemma fontos következményét, az ún. „removal” lemmát.

Az extrémális gráfelmélet egyik klasszikus eredménye Erdős és Gallai tétele hosszú utat, illetve kört nem tartalmazó gráfok élszámáról. Az elmúlt évtizedben még inkább a vizsgálatok központjába került a probléma lényegesen bonyolultabb hipergráf változata. A diszkrét matematika team másokkal együttműködve először több cikkben bebizonyította az alaptétel megfelelőjét, és ezeket a kutatásokat folytatva most leírták a váratlanul izgalmas extrémális struktúrákat, illetve az összefüggő hipergráfokra vonatkozó tételt. Ezek a kérdések már gráfok esetében is izgalmasak, meglepően nehezek voltak, csak évtizedekkel az alaptétel után sikerült megválaszolni. Most hipergráfokra – köszönhetően a felfedezett új módszereknek – már néhány év elteltével sikerült a szép tételeket megtalálni és bebizonyítani (3. ábra). A projekt a belső és külső kutatók kooperációjának kiváló példája [D4], [D5].



3. ábra: Extremális hipergráfok

Gráfok Ramsey-számának vizsgálata egy klasszikusan nehéz terület. Most lineáris erdők („path matchings”) kerültek a kutatások keresztüzebe. Korábban az intézeti kutatókkal szoros kapcsolatban lévő amerikai kutatók meghatározták a két színre vonatkozó Ramsey-számot, de továbblépni nem sikerült közel fél évszázadon keresztül. Az áttörést – bevonva egy amerikai kutatót is – úgy sikerült elérni, hogy megtalálták egy nagyon szép kiterjesztését a Tutte-féle klasszikus 1-faktor tételnek, pontosabban annak egy Las Vergnastól származó általánosításának [D6]. A bizonyítás érdekes kapcsolatot talál blokk-fedésekkel és hasonló problémákkal.

A Szakmódszertan osztály 2021 szeptemberében alakult meg. Az osztály sikeresen pályázott az MTA Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programjában való részvételre. A program keretében megalakult az MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport. A kutatócsoport egyik elsődleges célja, hogy nemzetközi szinten is magas rangsorolt folyóiratokban jelenjenek meg magyar matematikadidaktikai publikációk, ezen a területen ugyanis Magyarország a komoly matematikatanítási hagyományai ellenére sem szerepel jól. Kiemelt figyelmet kap a felfedezettő matematikaoktatás magyar irányzata, különös tekintettel a diszkrét matematika és a valószínűségszámítás-statisztika oktatására. Az osztály megkezdte a felkészülést a 2023-as, Budapesten rendezendő CERME konferencia (mintegy 800 résztvevő) megszervezésére.

## Digitalizáció

### Tématerület: (E) Topológiai és geometriai kutatások

Az úgynevezett log-Brunn–Minkowski-sejtés és a log-Minkowski-sejtés a parciális differenciálegyenletek, funkcionálanalízis, valószínűségszámítás és a konvex geometria határterületeinek központi problémája. Sikerült leírni a logaritmusos Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség és a logaritmusos Minkowski-egyenlőtlenség stabilitását az  $n$  független lineáris altérre szimmetrikus konvex testek esetén [E1].

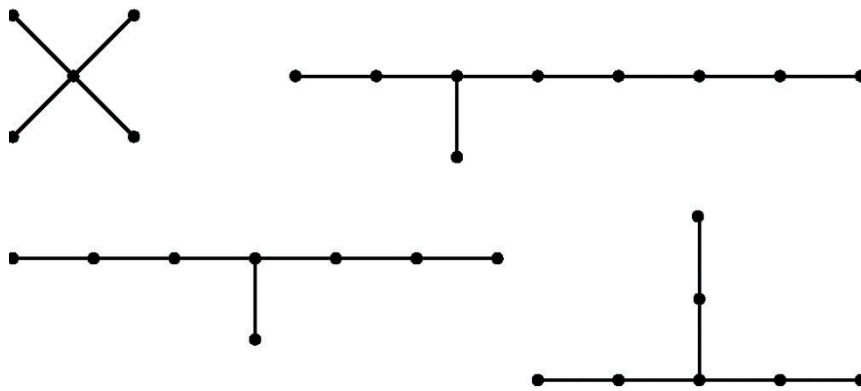
Belátták továbbá, hogy egy  $n$ -csúcsú multigráfnak, melyben bármely élpár legfeljebb egyszer metszi egymást, és bármely két párhuzamos él egy olyan „lencsét” határoz meg, melyben legalább egy csúcs van, maximum  $n^2(\log n)$  éle van. Sikerült bebizonyítaniuk Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi és Leighton nevezetes „keresztezési lemmájának” egy új – multigráfokra való – kiterjesztését. Sikerült közelítőleg belátniuk Erdős és Rado (1960) Delta-rendszerekre vonatkozó nevezetes sejtését abban a speciális esetben, ha a vizsgált halmazrendszer Vapnik–Chervonenkis-dimenziója korlátos. Megmutatták, hogy ebben az esetben, amennyiben a vizsgált halmazrendszer  $k$ -uniform és egy fix  $r$ -re nincs benne  $r$ -elemű Delta-rendszer, akkor a halmazok száma  $k$ -ban legfeljebb „alig” szuperexponenciális [E2].

Több évvel ezelőtt vezették be az „erősen anti-Uryszon (SAU)” tereket, mint olyan legalább két nem-izolált pontot tartalmazó Hausdorff-tereket, amelyekben bármely két végtelen zárt halmaz metszi egymást. Korábban csak konzisztens és legfeljebb kontinuum számosságú SAU példák voltak, de most  $2^{\text{kontinuum}}$  méretű SAU teret konstruáltak. Megoldották Fraser és Yu fraktáldimánziókkal kapcsolatos két problémáját. Belátták, hogy a módosított alsó dimenzió a kompakt halmazokon Borel-mérhető, valamint azt is, hogy a módosított alsó dimenzió stabil [E3].

Vizsgálták a kölcsönös definiálhatóságot a Minkowski-tér időszerű, fényyszerű, térszerű relációi között azzal a céllal, hogy megtalálják a legegyszerűbb definíciókat. Többek között megmutatták, hogy ezen relációk egyike sem definiálható a másiktól 3 változó segítségével [E4].

Bevezették az analitikus rácspontkohomológiát tetszőleges dimenziójú izolált szingularitásokra. Ez a pár évvel ezelőtti bevezetett topologikus verzió analitikus változata, amely érzékeli az analitikus struktúra változását [E5].

ADE szingularitások Hilbert-sémáihoz moduláris formákat rendeltek, és ezen formák moduláris tulajdonságait részletesen leírták. Definiálták tetszőleges additív vagy  $dg$  kategóriák Heisenberg-kategóriáját. Megkonstruálták ezen Heisenberg-kategóriák Fock-reprezentációit. ADE orbifoldok Quot sémáit leírták Nakajima tegez varietásokkal. A standard 4-dimenziós diszkben metszet csomók fontos családját adják a 3-dimenziós gömbben élő csomóknak. Ha azonban  $S^3$ -at más 4-sokaság peremeként tekintjük, ez a tulajdonság változik. Nem ismert például, hogy mely csomók metszetek a  $K3$  felületben. Ez a feladat szorosan kapcsolódik a  $K3$  felület negatív gömbjeihez, erről készítettek egy cikket, majd egy másik dolgozatban az egzotikus diszkok lehetőségeit is analizálták. Vizsgálták továbbá negatív önátmetszésű gömbök létezését elliptikus felületekben [E6] (4. ábra).



4. ábra: Szinguláris fibrumok egy elliptikus fibrálásban

#### Hivatkozások:

[A1] Ánh PN, Nam TG: Special irreducible representations of Leavitt path algebras, ADVANCES IN MATHEMATICS 377: paper no. 107439 (2021)

[A2] Domokos M: Bound for the cocharacters of the identities of irreducible representations of  $sl_2(\mathbb{C})$ , <https://arxiv.org/abs/2112.06870>

[A3] Csikós B, Riera IM, Pyber L, Szabó E: On the number of stabilizer subgroups in a finite group acting on a manifold, <https://arxiv.org/abs/2111.14450>

[A4] Pyber L, Tracey G: Some simplifications in the proof of the Sims conjecture, <https://arxiv.org/abs/2102.06670>

[A5] Eberhard S, Murphy B, Pyber L, Szabó E: Growth in linear groups, <https://arxiv.org/abs/2107.06674>

[A6] Abért M, Bergeron N, Fraczyk M, Gaboriau D: On homology torsion growth, <https://arxiv.org/abs/2106.13051>

[B1] Candela P, González-Sánchez D, Szegedy B: On higher-order Fourier analysis in characteristic  $p$ , <https://arxiv.org/abs/2109.15281>

[B2] Candela P, González-Sánchez D, Szegedy B: A refinement of Cauchy-Schwarz complexity, <https://arxiv.org/abs/2109.05965>

[B3] Ódor G, Czifra D, Komjáthy J, Lovász L, Karsai M: Switchover phenomenon induced by epidemic seeding on geometric networks, PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNITED STATES OF AMERICA 118(41): Paper e2112607118, 9 p. (2021)

[B4] Kharel S, Mezei TR, Chung S, Erdős PL, Toroczkai Z: Degree-preserving network growth, NATURE PHYSICS 18(1): pp 100-106. (2021)

[B5] Bokányi E, Juhász S, Karsai M, Lengyel B: Universal patterns of long-distance commuting and social assortativity in cities, SCIENTIFIC REPORTS 11: Article number 20829 (2021)

[C1] Lev N, Matolcsi M: The Fuglede conjecture for convex domains is true in all dimensions, ACTA MATHEMATICA HUNGARICA, megjelenés alatt, 29 p, <https://arxiv.org/abs/1904.12262v3>

[C2] Virosztek D: The metric property of the quantum Jensen-Shannon divergence, ADVANCES IN MATHEMATICS 380: Paper 107595 (2021)

[C3] Guasoni P, Nagy L, Rásonyi M: Young, timid, and risk takers, MATHEMATICAL FINANCE: AN INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS, STATISTICS AND FINANCIAL ECONOMICS 31(4): pp 1332-1356. (2021)

[C4] Timár Á: A nonamenable "factor" of a Euclidean space, ANNALS OF PROBABILITY 49(3): pp 1427-1449. (2021)

[C5] Biró A, Lev VF: Uncertainty in finite planes, JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 281(3): Paper 109026, 32 p. (2021)

[C6] Duke W, Imamoglu Ö, Tóth Á: On a class number formula of Hurwitz, JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY 23: pp 3995-4008. (2021)

[D1] Füredi Z, Jiang T, Kostochka A, Mubayi D, Verstraëte J: Partitioning ordered hypergraphs, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES A 177: Paper 105300 (2021)

[D2] Frankl P, Katona GOH: On strengthenings of the intersecting shadow theorem, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES A 184: Paper 105510, 21 p. (2021)

[D3] Füredi Z, Gerbner D: Hypergraphs without exponents, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES A 184: Paper 105517, 9 p. (2021)

[D4] Győri E, Lemons N, Salia N, Zamora O: The structure of hypergraphs without long Berge cycles, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES B 148: pp 239-250. (2021)

[D5] Győri E, Salia N, Zamora O: Connected hypergraphs without long Berge-paths, EUROPEAN JOURNAL OF COMBINATORICS 96: Article 103353 (2021)

[D6] DeBiasio L, Gyárfás A, Sárközy G: Ramsey numbers of path-matchings, covering designs, and 1-cores, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES B 146: pp 124-140. (2021)

[E1] Böröczky K, De A: Stable solution of the logarithmic Minkowski problem in the case of hyperplane symmetries, JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 298: pp 298-322. (2021)

[E2] Pach J, Tardos G, Tóth G: Disjointness graphs of short polygonal chains, <https://arxiv.org/abs/2112.05991>

[E3] Balka R, Elekes M, Kiss V, Poór M: Singularity of maps of several variables and a problem of Mycielski concerning prevalent homeomorphisms, ADVANCES IN MATHEMATICS 385: paper no. 107773 (2021)

[E4] Andr eka H, Madar asz J, N emeti I, Sz ekely G: Complexity in the interdefinability of timelike, lightlike and spacelike relatedness of Minkowski spacetime, <https://arxiv.org/abs/2112.15152>

[E5] Ágoston T, Némethi A: The analytic lattice cohomology of surface singularities, <https://arxiv.org/abs/2108.12294>

[E6] Stipsicz A, Szabó Z: On negative spheres in elliptic surfaces, PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, megjelenés alatt, [arXiv:2108.13632](https://arxiv.org/abs/2108.13632)

## II. Tudományszervezési eredmények, események

### *Általános ismertető a kutatóhely tudományos munkáját illetően*

A Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet a nemzetközi matematikai élet jelentős központja, alapvető feladata, hogy az elméleti matematika területén világszínvonalú kutatásokat folytasson. Az Intézet kutatási tematikáit folyamatosan a matematika fejlődése által felvetett legújabb kérdésekhez igazítják, tudományos feladatai elsősorban az alapkutatásra koncentrálnak, de néhány alkalmazott matematikai témára is jelentős erőket fordítanak. Ezek a témák elsősorban a mesterséges intelligencia, a nagy hálózatok kutatása, valamint a pénzügyi matematika, de a matematikai statisztikát is számos társtudományban (például a csillagászatban és a környezettudományban) használták. Az Intézet fontosnak tartja továbbá a matematika oktatásának kutatását is, melyet egy erre létrehozott szakmódszertani csoport végez. A 2021-es év során ez a csoport osztállyá alakult. A kutatómunka 12 tudományos osztályon folyik, melyekbe számos Lendület, ERC és Élvonal által támogatott kutatócsoport tartozik. Az Intézet által vezetett konzorcium 2021-ben folytatta az NKFIH támogatásával megkezdett, a mesterséges intelligencia matematikai alapjaival kapcsolatos kutatásait. Az ilyen irányú kutatások egyre komolyabb szerepet töltenek be, melynek külön nyomatékot ad az a tény, hogy intézeti csoportok több Nemzeti Laboratóriumnak lettek aktív, meghatározó tagjai. A beszámolási időszak során az Intézet kutatói 177 tudományos közleményt publikáltak. Legkiemelkedőbb eredményeik a legjelentősebb nemzetközi matematikai folyóiratokban (Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, Advances in Mathematics, Journal of the European Mathematical Society, Annals of Probability, Geometric and Functional Analysis stb.) láttak napvilágot. A 2021-es év meghatározó sikere volt Lovász László Abel-díja. Ez a kiemelkedő (a Nobel-díjhoz mérhető) kitüntetés Lovász professzor egyéni sikerén túl az egész magyar matematika, sőt a magyar tudomány számára volt emlékezetes pillanat.

Természetesen a 2021-es évre is rányomta bélyegét a koronavírus-járvány. Szerencsére az Intézetben a járvány nem terjedt el, a munkatársak sem kapták el a betegség súlyos változatait, de mindenképpen megváltoztatta a szokásos munkamenetet. A nyári konferencia-szezon teljesen elmaradt, az Intézet nem szervezett jelentős tudományos találkozót, munkatársaik sem vettek részt a megszokott mértékben személyesen ilyen rendezvényeken. Remélik, a helyzet számottevően javulni fog a következő év során.

Az Intézet életében komoly változás várható az Erdős Központ elindításától: 2022-től tematikus szemeszterek és más hasonló konferenciák, workshopok találnak majd otthonra a Központban. Ezzel az Intézetnek mind nemzetközi beágyazottsága, mind láthatósága jelentősen nőni fog és remélik, hogy a speciális szemeszterek témájában a hazai, Intézeten kívüli kutatás is meg fog újulni.

### *A tudomány és a társadalom kapcsolata, társadalmi hasznosság*

Az Intézet alapkutatási témáinak többsége sajnos nehezen kommunikálható a társadalommal folytatott párbeszéd során. Ugyanakkor a kutatók sikerei a médiában is megjelenítették az Intézetben folytatott kutatásoknak a jelentőségét. Különösen igaz ez a már említett Abel-díj kapcsán, mely jó lehetőséget adott arra, hogy a matematika fejlődésében megfigyelhető trendekről is szó essen a nyilvánosság fórumain. Ennek kiemelkedő terepe az Intézet és a Bolyai Társulat által közösen szerkesztett online folyóirat, az Érintő. Ezen fórumon a kutatók nemcsak matematikai eredményekről tudnak közérthetően mesélni, de a középiskolai és egyetemi matematika-tanítás kérdéseinek vizsgálatával el tudják érni mind az ott tanító pedagógusokat, mind a diákokat.

Az Intézet munkatársai fontos szerepet vállalnak a matematika népszerűsítésében, ismeretterjesztő előadásokat tartanak középiskolások és egyetemisták számára. Rendszeresen sor kerül a Magyar Tudomány Ünnepe keretében az intézeti bemutató rendezvényre, ahol elsősorban középiskolások és tanáraik tájékozódhatnak a matematikusi pálya kihívásairól és szépségeiről. Áprilisban vegyes formában megrendezésre került a Lányok Napja, melynek keretében több érdeklődő középiskolás



diáklány látogatott az Intézetbe, és nyert bepillantást az ott folyó munkába, illetve egy-egy matematikai gondolatba.

*A kutatóhely legfontosabb hazai és nemzetközi eredményes K+F+I együttműködései az elmúlt évben*

a) Az állami költségvetési, a nonprofit és a kormányzati szektorral való kapcsolatok

A Rényi Intézet fő arcéle a matematikai alapkutatások folytatása, mely területen általában csak más kutatóhelyekkel, kutatóegyetemekkel áll kapcsolatban. Leginkább a számítástechnika és a mesterséges intelligencia területén kerülnek kapcsolatba olyan vállalkozásokkal, kormányzati szervekkel, akikkel akár az Intézet alapkutatási eredményeire is alapozva adtak be közös kutatás-fejlesztési pályázatokat, és (akár e sikeres pályázatok mentén) folytatnak közös alkalmazott kutatási munkát. Ilyen szakmai kapcsolat alakult ki a Magyar Államkincstárral, illetve annak informatikai cégével, a KINCSINFO Nonprofit Kft-vel a MÁK működését segítő K+F feladatok adatelemzési és gépi tanulási módszerekkel való megoldására. Kialakulóban van az Állambiztonsági Szolgálatok Történeti Levéltárával az ottani iratok mesterséges intelligenciával történő feldolgozására irányuló kutatás. Az ALTEO NyRt-vel közös projektjük, mely az energetikai piacra dolgoz ki mesterséges intelligencián alapuló előrejelzéseket és kereskedő algoritmusokat, az energetikai piac, irányítás vagy felügyelet nonprofit vagy kormányzati szektora számára is hasznos lehet.

A Rényi Intézet meghatározó konzorciumi partner a Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratóriumban, ahol a mesterséges intelligencia matematikai alapjainak kutatása révén szoros együttműködés alakult ki más ELKH kutatóhelyekkel és kutatóegyetemekkel. Az újonnan alakuló Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium Adatvezérelt Egészségügyi és Járványdinamikai divízióiban is résztvevő konzorciumi partnerként további kutatóhelyekkel és kormányzati szervekkel is kialakulóban vannak a munkakapcsolatok.

A Rényi Intézetben folyó tantárgypedagógiai, a matematika tanításával foglalkozó osztály, illetve egyéni kutatók együttműködtek több hazai, illetve külföldi egyesülettel és más non-profit (matematikai oktatási) szervezetekkel a matematika tanítási módszereinek kutatási területein.

A Rényi Intézet a Fulbright-Rényi-BSM megállapodás keretében évente tipikusan egy kutató és egy vagy két diák (BSc-t szerzett, posztgraduális tanulmányai előtt álló) ösztöndíjast fogad. A háromoldalú megállapodás szerint az ösztöndíjasok anyagi támogatását (ösztöndíj, illetve tandíjkedvezmény formájában) a másik két szerződő fél (Fulbright és BSM-Budapest Semesters in Mathematics az amerikai ernyőszervezete, a Pro Mathematica Arte alapítvány útján) nyújtja, a Rényi Intézet a kutatási lehetőséget, kapcsolatokat, illetve a diák ösztöndíjas esetében témavezetést biztosít. A COVID járvány miatt a 2020/21 akadémiai évben egyetlen diák ösztöndíjasuk volt. A 2021/22 akadémiai évben azonban két diák és két kutató ösztöndíjossal a Rényi Intézet a legtöbb Fulbright ösztöndíjast fogadó magyar intézmény lesz.

b) Felsőoktatási intézményekkel való együttműködések

Az Intézet számára nagy jelentőségű a tudományos utánpótlással való közvetlen kapcsolat. Ennek jegyében az Intézet kutatói több budapesti és vidéki felsőoktatási intézmény (BME, ELTE, NKE, Pannon Egyetem, Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Szegedi Tudományegyetem, Tomori Pál Főiskola) munkájában vesznek részt. 2021 folyamán az Intézet 88 munkatársa (a teljes kutatói létszám 48%-a), oktatót valamelyik hazai felsőoktatási intézményben. Különösen jelentős a szerepük a doktorképzésben és a mesterszakos képzésben. Az Intézet kutatói közül 17-en törzstagok különböző doktori iskolákban, 2021-ben 82 doktorandusz munkáját irányították témavezetőként. A Budapest Semesters in Mathematics angol nyelvű egyetemi részképzési program oktatóinak nagy része is az Intézet kutatója. Ez a program az amerikai egyetemekre viszi el a magyar matematika hírért, és mintául szolgál más nemzetközi oktatási programoknak is.

A vendégkutatói program részeként újból lehetőség nyílt arra, hogy egyetemi kollégák egy vagy két szemesztert oktatási feladataiktól mentesülve az Intézetben tölthessenek vendégkutatóként. E program keretében az elmúlt évben az ELTE-ről hat, a BME-ről, a Debreceni Egyetemről, valamint a Szegedi Tudományegyetemről egy-egy oktató vett részt a Rényi Intézetben folyó kutatómunkában. A *Budapest Graduate Seminar* megszervezésével az Intézet fórumot kíván biztosítani a magyar doktoranduszok számára, hogy találkozni tudjanak kitűnő előadókkal, de más egyetemek doktorandusz hallgatóival is.

A szemeszterenként 6-7 alkalommal megtartott 2 órás előadások az Intézet nagytermében (és természetesen online formában) erre adnak lehetőséget.

#### c) Egyéb együttműködések, kapcsolatok

Az Intézetben heti rendszerességgel folyó szakmai szemináriumok munkájába igen nagy számban kapcsolódnak be más intézmények, köztük vidéki egyetemek munkatársai is, ezáltal ezek a szemináriumok az egész hazai matematikai életre jelentős hatást gyakorolnak. A lehetőségek még szélesebbé váltak a rendszeressé váló hibrid szemináriumokkal, hiszen így hosszas utazás nélkül is könnyedén be lehet kapcsolódni a szakmai munkába. (Az időnkénti személyes találkozás azonban továbbra is nagyon fontos.)

A Rényi Intézet kutatói a matematikai közélet feladataiból hagyományosan számarányukon felül veszik ki részüket. Ezek között említhető az MTA Matematikai Tudományok Osztályában és az akadémiai bizottságokban, az NKFIH testületeiben, a Bolyai János Matematikai Társulatban végzett munka. A Bolyai János Matematikai Társulat elnöke, főtítkára, főtítkárhelyettese, tudományos szakosztályának elnöke és alkalmazott matematikai szakosztályának egyik alelnöke mind a Rényi Intézet kutatói, egy kutató pedig a Nemzetközi Matematikai Olimpia szervezőbizottságának választott elnökségi tagja.

Az Intézet kutatói igen széleskörű nemzetközi kapcsolatokkal rendelkeznek. A társszerzős munkák zömében a szerzők között az intézeti kutató(k) mellett külföldi matematikusok találhatók. Közös projektek és közösen szervezett konferenciák is jellemzőek. Az Intézet munkatársai közül 2021-ben 28-an vettek rész nemzetközi konferencia szervezésében, néhányan közülük több alkalommal is.

Az Intézet kutatói 2021-ben 18 nemzetközi tudományos bizottságban vettek részt. 2021-ben 157 alkalommal szerepel intézeti kutató neve nemzetközi folyóirat szerkesztő bizottságának névsorában. A munkatársak az elmúlt évben 230 előadást tartottak nemzetközi rendezvényeken, ezek közül sokat meghívott, illetve plenáris előadóként.

A 2021-es évben az Intézetből 7 kutató volt távol fél évnél hosszabb ideig a következő külföldi intézményekben: Lancaster University (Anglia), Technische Universität Graz (Ausztria), Universität Hamburg (Németország), Auburn University (USA), University of Chicago (USA), University of Toronto (Kanada).

Az intézeti kutatók által elnyert ERC támogatások és a Lendület-projektek keretéből, illetve más forrásokból az elmúlt évben 19 külföldi kutató dolgozott az Intézetben.

Az ERC támogatások közül kiemelkedik az eddig egyetlen matematikai kutatási témájú „DYNASNET” ERC Advanced Grant, mely a prágai Károly Egyetemen és a bécsi Közép-Európai Egyetemen közös, a Rényi Intézet által koordinált kutatási projekt, széles körűen támogatva a nemzetközi kutatási együttműködések.

#### *A kutatóhely hazai vonatkozású pályázati adatai*

A Rényi Intézet a korábbi évekhez hasonlóan kimagaslóan szerepelt a hazai kiválósági kutatási pályázatokon. A 2020-ban elnyert (és így természetesen 2021-ben is futó) 1 Lendület és 3 NKFIH „Élvonal” (Kutatói Kiválósági Program) pályázat után 2021-ben megismétlődött a 2020. évi kiváló eredmény, és újabb 1 Lendület és 3 NKFIH KKP projektet nyertek az Intézet kutatói, illetve a kutatásaikat az elnyert Lendület kutatási projekt keretében az Intézetben folytatni kívánó (2021-ben külföldről hazatérő) kutatók. Ezen legmagasabb presztízsű kutatások mellett számos új hazai NKFIH kutatási (kutatói, fiatal kutatói, posztdoktori, nemzetközi) témapályázatot nyertek az elmúlt években, így 2021 folyamán is.

2021-ben kezdődtek az ALTEO Energiaszolgáltató Nyrt-vel közösen „Valós idejű, autonóm energetikai információs és termelésmenedzsment rendszer fejlesztése”-re elnyert NKFIH Piacvezérelt kutatás-fejlesztési és innovációs projekt munkálatai, melyek mindjárt az első hónapokban áttörő sikert eredményeztek az országos elektromos energiapiacra fellépő szabályozási kiegyenlítési teljesítmény előrejelzésében.

A 2018-ban a Rényi Intézet vezetésével kialakított konzorcium által beadott és elnyert NKFIH Nemzeti Kiválósági Program „A mesterséges intelligencia matematikai alapjai” eredményeire alapozva 2018-19 folyamán az ITM az Intézetet kérte fel egy új, országos, a mesterséges intelligencia matematikai alapjainak és alkalmazásainak kutatására létrejövő, szélesebb konzorciumon alapuló kutatási projekt megtervezésére. 2019 második felében az akkor kialakuló Nemzeti Laboratóriumok keretei közé került áthelyezésre a tervezés, és a SZTAKI átvette a konzorcium vezetését a Rényi Intézettől. A Rényi Intézet maradt az alapkutatói alprojekt vezetője, és a SZTAKI-val együtt fejezték be a Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium kialakítását, majd 2020 második félévétől a működtetését. A projekt célja egy olyan tudásközpont létrehozása, amely elősegíti, hogy az ország a mesterséges intelligencia kutatása és alkalmazásai terén a világ élvonalába kerülhessen. Ehhez elengedhetetlen a mesterséges intelligencia-kutatások magyarországi felfuttatásához szükséges kritikus kutatói erőforrás koncentrációja, strukturálása és megerősítése. A négy ELKH kutatóintézet/központ, öt felsőoktatási intézmény és a Nemzetbiztonsági Szakszolgálat együttműködésével egy olyan új kutatási eredményeket létrehozó szellemi műhely létesült, amelynek keretében folytonosság teremthető a mesterséges intelligencia legelméletibb és leggyakorlatibb irányai között. A különböző jellegű feladatokon dolgozó kutatók nem izoláltan, hanem szorosan együttműködve dolgoznak, biztosítva a folytonos információáramlást az elméleti és gyakorlati irányok között. A gondos előkészítés eredményeként a Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium nagy mérete ellenére a legjobban szervezett és teljesítő nemzeti laboratóriumként kezdte meg működését. A központi finanszírozási feltételek folytonos biztosítása érdekében idáig három alkalommal kellett pályázatot benyújtani a projekt biztosítása érdekében. Az első projekt időszak 2020. június végén zárult, mely során a második, 8 hónapos projekt futamidő előkészítése is megtörtént. Ez idő alatt, az intenzív kutatómunka mellett, a 3. – 2022. március elsejével induló – újabb, a tervek szerint az RRF alapból finanszírozandó és véglegesnek tekinthető projekt előkészítése is lezajlott, és megkapta az NKFIH támogatásra érdemesítő előminősítést. Ezzel a munkával párhuzamosan folyt/folyik a magyar MILAB nemzetközi pályázati felkészítése is, a SZTAKI/BME/Rényi Intézet alkotta konzorcium a német Fraunhofer-Gesellschaft-tal közösen beadott egy EU Teaming for Excellence (Widening participation and strengthening the European Research Area) projektjavaslatot egy mesterséges intelligencia kiválósági központ létrehozására, mely megkapta a szükséges előminősítést, így 2022 folyamán beadásra kerülhet a második, kidolgozott projektjavaslat is.

A Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium előkészítése mellett a Rényi Intézet az új „Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium” előkészítésében, két divíziójának a munkájában is részt vett, és itt is megkapták az NKFIH szükséges előminősítést.

#### *2021-ben megjelent legfontosabb tudományos publikációk*

1. Ódor G, Czifra D, Komjáthy J, Lovász L, Karsai M: Switchover phenomenon induced by epidemic seeding on geometric networks, PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNITED STATES OF AMERICA 118(41): Paper e2112607118, 9 p. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138961/>
2. Lovász L: Flows on measurable spaces, GEOMETRIC AND FUNCTIONAL ANALYSIS 31(2): pp 402-437. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138962/>
3. Matszangosz Á: On the cohomology rings of real flag manifolds: Schubert cycles, MATHEMATISCHE ANNALEN 381(3-4): pp 1537-1588. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138963/>
4. Füredi Z, Gerbner D: Hypergraphs without exponents, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES A 184: Paper 105517, 9 p. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138964/>
5. Timár Á: A nonamenable "factor" of a Euclidean space, ANNALS OF PROBABILITY 49(3): pp 1427-1449. (2021)  
<http://real.mtak.hu/135349/>

6. Biró A, Lev VF: Uncertainty in finite planes, JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 281(3): Paper 109026, 32 p. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138965/>
7. Pach J, Rubin N, Tardos G: Planar point sets determine many pairwise crossing segments, ADVANCES IN MATHEMATICS 386: Paper 107779 (2021)  
<http://real.mtak.hu/139025/>
8. Szabó Sz: Perversity equals weight for Painlevé spaces, ADVANCES IN MATHEMATICS 383: Paper 107667 (2021)  
<http://real.mtak.hu/138967/>
9. Bencs F, Tóth LM: Invariant random subgroups of groups acting on rooted trees, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY 374: pp 7011-7040. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138968/>
10. Virosztek D: The metric property of the quantum Jensen-Shannon divergence, ADVANCES IN MATHEMATICS 380: Paper 107595 (2021)  
<http://real.mtak.hu/120869/>
11. Böröczky K, Domokos M, Solanes G: Dimension of the space of unitary equivariant translation invariant tensor valuations, JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 280(4): Paper 108862, 18 p. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138969/>
12. Balka R, Elekes M, Kiss V, Poór M: Singularity of maps of several variables and a problem of Mycielski concerning prevalent homeomorphisms, ADVANCES IN MATHEMATICS 385: Paper 107773 (2021)  
<http://real.mtak.hu/139022/>
13. Keszegh B, Lemons N, Martin RR, Pálvölgyi D, Patkós B: Induced and non-induced poset saturation problems, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES A 184: Paper 105497, 20 p. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138971/>
14. Győri E, Lemons N, Salia N, Zamora O: The structure of hypergraphs without long Berge cycles, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES B 148: pp 239-250. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138972/>
15. Guasoni P, Nagy L, Rásonyi M: Young, timid, and risk takers, MATHEMATICAL FINANCE: AN INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS, STATISTICS AND FINANCIAL ECONOMICS 31(4): pp 1332-1356. (2021)  
<http://real.mtak.hu/138973/>