

MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktika Kutatócsoport

Fedezzük fel és értsük meg közösen! - A tanulói megértés fejlesztése matematikatanárok és tanárjelöltek módszertani támogatásán keresztül

Tartalomjegyzék

Bevezető.....	1
Előzmények.....	1
A vizsgálandó probléma, a tudományos háttér felvázolása.....	2
Az új projekt céljai.....	5
A kutatócsoport felépítése.....	6
Várható eredmények, hasznosulás.....	7
Részletes munkaterv.....	8
1. A felfedezettő matematikatanítás és az értő matematikatanulás folyamatainak elemzése	
1.1. A diszkurzivitás mint az értő matematikatanulás kerete	
1.2. Az értő matematikatanulás folyamatának jellegzetességei	
1.3. Eszközhasználat és reprezentációk szerepe a felfedezettő matematikaoktatásban	
2. Matematikatanárok és tanárjelöltek módszertani támogatása	
2.1. A tanári hatékonyság és minőség fejlesztése matematikatanár-szakos hallgatók körében	
2.2. Gyakorló tanárok és tanárszakos hallgatók felfedezettő tanításának vizsgálata	
2.3. Lesson Study a matematika tanárképzésben	
Irodalomjegyzék.....	18

Bevezető

Pályázatunk az MTA Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programjának keretében 2021 és 2025 között már eredményesen működő MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport munkájának tervezett folytatását mutatja be. Pályázatunk résztvevői az ország különböző régióiban dolgozó egyetemi oktatók (köztük tapasztalt és fiatal kutatók), PhD-hallgatók, gyakorló általános iskolai és középiskolai tanárok. Az új négyéves projekt célja, hogy az előző pályázat során elért eredményeket felhasználva tovább segítsük a felfedezettő matematikaoktatás széleskörű implementációját a tanárképzéstől a mindennapi tanári gyakorlatig, tovább kutassuk a diákok értő matematikai tanulásának folyamatát, erősítsük az együttműködést az egyetemek és a közoktatási intézmények között, folytassuk a hazai felfedezettő matematikaoktatási hagyományok jobb megismertetését a nemzetközi matematikadidaktikai közösséggel, illetve a korszerű nemzetközi kutatási trendeket építsük be a Magyarországon folyó kutatásokba és fejlesztésekbe. Kitüntetett célunk továbbá, hogy a projekt keretei között folytassuk a korábbi projektek során kialakított kutatói együttműködések hazai és nemzetközi vonatkozásban, és minél több fiatal kutatót, PhD-hallgatót vonjunk be a kutatásba. Ezáltal projektünk újabb előrelépést jelentene a matematikadidaktikai kutatások hazai intézményesülése felé.

Előzmények

Kutatócsoportunk a 2016 és 2021 között megvalósult két projekt (az MTA-ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás és az MTA-Rényi Felfedezettő Matematikatanítás kutatócsoportok), majd a 2021 és 2025 között ezek folytatólagosan közös tevékenységeként működő MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport munkáját szeretné folytatni. Az MTA-ELTE projekt kiinduló-

pontja Varga Tamás komplex matematikaoktatási reformja és az annak alapját képező matematikaoktatási felfogás, Varga Tamás didaktikai munkássága volt, míg az MTA-Rényi projekt Pósa Lajos tehetséggondozási programját, annak módszerét kutatta. A két csoport összeolvadásából 2021-ben megalakult MTA-Rényi-ELTE kutatócsoport kutatásainak fókuszában a felfedezettő matematikaoktatás magyar irányzata állt, valamint ennek kapcsolata más irányzatokkal. Mindez a 2016 és 2021 között kikristályosodott kutatási irányok mentén, a magyar matematikadidaktika meglévő hagyományaiból kiindulva érdemben járult hozzá mind a magyar közoktatás fejlesztéséhez, mind a nemzetközi didaktikai kutatásokhoz. Ezen tevékenység során a kutatócsoport különösen eredményesnek bizonyult a következő területeken:

- a korábbi pályázatok során kialakított kutatói műhelyek stabilizálása;
- magyar kutatók nemzetközi jelenlétének erősítése, a hazai kutatások közismertté tétele;
- módszertani segédanyagok kidolgozása, tanárképzési valamint tanártovábbképzési kurzusok tartalmi és módszertani megújítása;
- egyes matematikai témák tanításának kutatása, különösen a diszkrét matematika és a valószínűségszámítás-statisztika területein.

A kutatócsoport munkájának további két nagy eredményét (egy hazait és egy nemzetközit) emeljük ki:

- 2022-ben megalakult a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben a Szakmódszertani Osztály (vezetője Juhász Péter), amelynek fő tevékenysége egy módszertani kutatásokat szervező és nemzetközi együttműködéseket célul tűző kutató-tanár és matematika-didaktikus hálózat kialakítása és irányítása.
- 2023 júliusában Budapesten bonyolítottuk le nagy sikerrel a CERME13 konferenciát, melyen mintegy 1000 kutató vett részt a világ különböző pontjairól. A konferencia szervezőbizottságának az elnöke Csapodi Csaba volt, a szervezésben és az előkészítésben a most pályázó kutatócsoport tagjai közül sokan tevékenyen részt vettek.

A vizsgálandó probléma, a tudományos háttér felvázolása

Eric Hanushek (University of Stanford), oktatáskutatással foglalkozó, nemzetközileg elismert közgazdász a Magyar Tudományos Akadémián 2023. február 27-én tartott előadásában rámutatott arra, hogy egy ország jóléte és a minőségi oktatás között egyértelmű kapcsolat mutatható ki. A minőségi oktatáshoz pedig Hanushek szerint alapvetően egyetlen dologra van szükség: hatékony pedagógusokra a köznevelésben (Hanushek, Rivkin, 2006; Hanushek, 2022). Számos más kutatás is (pl. Barber, Mourshed, 2007) rámutatott arra, hogy az iskolák és az egész oktatási rendszer eredményessége nagymértékben a pedagógusok munkáján múlik. A pedagógiai kutatások azt is kimutatták, hogy a matematika tanításának felfedezettő, a tanulót a középpontba helyező módja jelentősen javítja a tanulói eredményességet és motivációt a matematikai és egyéb területeken is (Laursen, Rasmussen, 2019). Az ún. „felfedezettő matematikaoktatás” létező magyar hagyománya tehát megfelelő kiindulópontot jelenthet a fenti cél elérésében. Jelenleg azonban a felfedezettő matematikaoktatás kevesek számára hozzáférhető széleskörű elterjesztése, implementációja évtizedek óta akadozik, nehézségekbe ütközik.

Inquiry Based Mathematics Education (IBME) és a magyar felfedezettő matematikaoktatási hagyomány

A matematikai felfedezés fontosságát nem csak a magyar felfedezettő matematikaoktatási gyakorlatban, hanem a nemzetközi matematikaoktatásról szóló diskurzusban is gyakran hangsúlyozzák. Az Inquiry Based Learning, Inquiry Based Education kifejezések gyakran bukkannak fel különböző nemzeti és nemzetközi oktatáspolitikai dokumentumokban (Artigue & Blomhøj 2013). Az EU az elmúlt évtizedekben több nagy IBME-tárgyú nemzetközi projektet is finanszírozott (Maass 2013).

Az IBME sok szempontból éppen azokat a területeket helyezi előtérbe, amelyek a hazai matematikaoktatás gyakorlatában általában problémásnak bizonyulnak. A nemzetközi gyakorlatban létező, különböző felfedeztető jellegű matematikaoktatási gyakorlatok nagy hangsúlyt helyeznek – egyebek mellett – az alábbi szempontokra:

- *értő tanulás*: a magolás, a formális műveletek gyakorlása helyett a matematikai fogalmak mélyebb megértése;
- *aktív tanulás*: a tanulók aktív részvétele a saját matematikai tudásuk felépítésében – a matematika újra-felfedezése a tanulók által, a tanár támogatásával;
- *gondolkodásra nevelés*: a problémák felvetése és megoldása, a kritikus gondolkodás fejlesztése kerül előtérbe a rutinfeladatok megoldása helyett;
- *alkalmazható tudás*: különféle (a tanulók számára megközelíthető, érthető) kontextusba ágyazott problémák felvetése és megoldása, kapcsolódás más tantárgyakkal (STEAM);
- *társas tanulás*: változatos munkaformák, a társak szerepének fontossága a tanulási folyamatban.

A kutatásokban ezek a szempontok a matematikadidaktika tudománnyá válásának kezdetétől, az 1970-es évektől jelen vannak, fontosságukkal kapcsolatban széles körű az egyetértés. Ugyanakkor különféle kutatásokban és oktatásfejlesztési projekteknél változatos irányzatok alakultak ki, amelyek más-más szempontokra helyezik a hangsúlyt és így más-más jellegzetességekkel bírnak. Jelenleg nem létezik egységes, nemzetközi szinten is elismert IBME-elmélet vagy IBME matematikaoktatási gyakorlat – ugyanakkor a különféle létező matematikadidaktikai irányzatok más-más szempontokkal járulhatnak hozzá az IBME gyakorlatának széleskörű terjesztéséhez, közoktatásban való meghonosításához (Artigue & Blomhøj 2013, Artigue et al 2020).

A magyar felfedeztető matematikaoktatás – megfelelő leírás hiányában – 2021-ig alig jelent meg az IBME-ről szóló nemzetközi diskurzusban. Az előző pályázati ciklusban a kutatások eredményeként több publikáció is megjelent, amelyek gazdagították a témával kapcsolatos nemzetközi kutatásokat, miközben a hazai gyakorlat továbbfejlesztését segítették.

Magyarországon az ún. „felfedeztető matematikaoktatásnak” száz évre visszanyúló hagyományai vannak (Gosztonyi 2016). A rangos matematikusok (pl. Fejér Lipót, Pólya György, Kalmár László, Péter Rózsa stb.) által érelt matematikaoktatási koncepció mindenekelőtt a matematikai tehetséggondozásra gyakorolt jelentős hatást: ennek ma legismertebb képviselője Pósa Lajos (Juhász 2019). A közoktatás számára Varga Tamás dolgozott ki az 1960-70-es években az akkori teljes kötelező oktatást (1-8. osztály) lefedő matematikaoktatási koncepciót, amely az ún. *komplex matematikaoktatási reform* alapjává vált (Halmos & Varga 1978, Szendrei 2007, Gosztonyi et al. 2018). Pósa Lajos módszere és Varga Tamás reformja között történeti és felfogásbeli összefüggések ismerhetők fel. Ezeket a kapcsolatokat a jelen pályázat előzményét jelentő két projekt – a Varga Tamás reformjából kiinduló MTA-ELTE projekt és a Pósa Lajos munkásságára építő MTA-Rényi projekt – már elkezdte feltárni, a 2021 és 2025 között zajló új, közös projekt során pedig újabb eredmények születtek ezeknek az összefüggéseknek a feldolgozásában (Gosztonyi 2020, Gosztonyi & Varga 2023, Artigue et al. 2020, Daunt et al., 2022, Urbanski et al., 2022).

A felfedeztető matematikaoktatást jelenleg tanárok egy szűk köre gyakorolja szisztematikusan, akik a legtöbbször személyes tapasztalatok alapján sajátították el a felfedeztető oktatás gyakorlatát (Györi & Juhász 2017). A felfedeztető matematikaoktatási felfogás, az ehhez kapcsolódó tanítási módszerek átfogó, koherens leírása azonban maig hiányzik, ez pedig mind a magyarországi disszemináció, mind a nemzetközi kutatási diskurzusban való részvétel szempontjából akadályt jelent. A 2016 és 2021 közötti ciklusban mind az MTA-Rényi, mind az MTA-ELTE projekt tett lépéseket a Pósa-módszerből, illetve a Varga Tamás-féle reformból kiindulva a magyar felfedeztető matematikaoktatási hagyomány leírására (Gosztonyi 2020; Artigue et al 2020); különösen fontos mérföldkő volt ebből a szempontból az általunk rendezett Varga 100 nemzetközi konferencia, és azon belül is az *Inquiry Based Mathematics Education and the development of learning trajectories* c. panelbeszélgetés (Artigue et al. 2020).

Az eddigi elemzések alapján elmondható, hogy az ún. „felfedezettő matematikaoktatás” magyar gyakorlata magán viseli az IBME jellegzetességeit és számos közös vonást hordoz más, nemzetközi elismertségnek örvendő, IBME-hez köthető matematikaoktatási irányzatokkal, illetve didaktikai elméletekkel (mint a Freudenthal munkáján alapuló Realisztikus Matematikaoktatás, a Brousseau-féle Didaktikai Szituációk Elmélete, vagy a Pólya nyomán az angolszász országokban kialakult Problem Solving irányzat). Ugyanakkor a Magyarországon létező felfedezettő matematikaoktatási hagyománynak egyedi, vagy legalábbis több rokon irányzattól eltérő jellegzetességei is felismerhetők (Gosztonyi 2020). Ilyenek különösen:

- az örömteli matematikatanulás, a matematika mint örömforrás előtérbe helyezése;
- komplex, sok szempontból „gazdag” feladatok (beleértve a matematikai tartalom komplexitását, sok esetben egyszerre több matematikai területhez köthető feladatokat; a feladatok potenciálját arra nézve, hogy azokból kiindulva a tanulók új matematikai tudást építsenek fel, matematikai felfedezéseket tegyenek; illetve sok esetben a feladatok nyitott jellegét, többféle megoldási lehetőséget);
- hosszú és komplex felfedezettő tanítási folyamatok tervezése problémásorozatok és -hálók formájában, a tanár önállóságának hangsúlyozása a tanítási folyamatok tervezésében;
- dialogikus tanítási stílus, a tanár-diák interakciók fontossága az irányított felfedezési folyamatok során (amihez a tanár komoly matematikai és módszertani felkészültsége szükséges);
- a matematikaoktatásban használt eszközök és reprezentációk sokfélesége;
- a matematika és a művészet, a játék, a kreativitás közötti kapcsolat hangsúlyozása.

A felfedezettő oktatásnak ezek a sajátosságai kiemelt figyelmet kapnak az új kutatóprojektünkben is.

Az implementáció nehézségei, a tanári munka támogatásának fontossága

Ahogy feljebb már említettük, a felfedezettő matematikaoktatás széleskörű implementációját Magyarországon máig nem sikerült megvalósítani. Bár Varga Tamás reformja a közoktatás egészét célozta, és az általa kidolgozott tantervek és tankönyvek, tanári kézikönyvek hatása máig kimutatható a hazai matematika tantervekben és bizonyos tankönyvcsaládokban, a Varga-féle reform szellemiségének megfelelő tanítási módszereket a maguk komplexitásában csak tanárok, tanítók egy szűk köre követi.

A széleskörű implementáció nehézségei korántsem csak a hazai matematikaoktatásra jellemzőek. Az IBME-vel kapcsolatos nemzetközi projektek kiemelt problémaként kezelték (és kezelik) azt a kérdést, hogy hogyan lehet a tanárokat támogatni az IBME jellegű matematikaoktatási gyakorlatok hétköznapi tanításba való beépítésében (Artigue et al 2013). Ennél tágabb értelemben egyre növekvő számú matematikadidaktikai kutatás vizsgálja az innovatív tanítási gyakorlatok elterjesztésével, a tanárok szakmai fejlődésének támogatásával kapcsolatos problémákat (Maass, Cobb, Krammer et al 2019, Borko & Potari 2020). Ezek a kutatások abból a felismerésből táplálkoznak, hogy nem elég jó gyakorlatokat kidolgozni, szűkkörű kutatásokban kipróbálni, mert ezek a tanárok szélesebb köre számára nem válnak automatikusan alkalmazhatóvá. Fontos vizsgálni emellett azt is, hogy a tanárokat mi motiválja a szakmai fejlődésben, és hogy milyen feltételekkel, hogyan tudják fejleszteni, gazdagítani saját tanítási gyakorlatukat.

Ezeket a kérdéseket a felfedezettő matematikaoktatás vonatkozásában az MTA-ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás projekt keretében már elkezdjük tanulmányozni, majd a 2021 és 2025 között zajló projektünkben is kiemelt hangsúlyt helyeztünk a tanárok támogatásának kérdésére, olyan tanári segédanyagok és tanárképzési, tanártovábbképzési modulok fejlesztésével, amelyek tanárok széles körét segíthetik hatékonyan a felfedezettő matematikaoktatás gyakorlatának elsajátításában (Gosztonyi & Varga, 2023; Kónya & Kovács, 2022). Kísérleteinkben különösen törekedtünk arra, hogy ne csak „elit” oktatási intézményekből vonjunk be tanárokat, hanem az ország különböző régióiból, különböző profilú intézményekből vonjunk be résztvevőket, így biztosítva, hogy

az általunk kidolgozott modulok valóban a tanárok széles köre számára hozzáférhetőek és hasznosak legyenek.

Az egyetemi matematikatanár képzésbe is elkezdjük integrálni a kutatásaink eredményeit. Az ELTE-n például az Elemi matematika 2 kurzus kísérleti megújítása a felfedezettő matematikaoktatás sajátosságainak, és különösen a Varga Tamás-féle kombinatorika tanterv felépítésének elemzésén alapult, illetve az eddigi projektek keretében, tapasztalt felfedezettő módon tanító tanárok részvételével kidolgozott segédanyagok egyikét is integráltuk a kurzus tananyagába. A matematikusokkal együttműködésben fejlesztett kurzus a 2022-től kezdődő tanárképzési reform keretében a megújuló matematika kurzusok első modelljévé vált. (Gosztonyi, Héger & Csapodi, benyújtott).

Projektünknek a matematika tanárképzésre immár országos szinten is hatása van, munkánk nyomán a 2022-től érvényes KKK-ba többek között hangsúlyosan került be a Varga Tamás-féle felfedezettő matematikaoktatás hagyományainak ismerete és a problémásorozat fogalma.

A képzések fejlesztése és segédanyagok kidolgozása mellett olyan pilot projektet is végeztünk, amelyben egy kezdő tanárt több éven át követve támogattunk felfedezettő oktatási gyakorlatának fejlesztésében (Juhász et al., 2024). Ez a pilot projekt modellül kíván szolgálni tanárok egy fokozatosan szélesedő körének támogatásában a jövőben.

Az új projekt céljai

A fentieket összefoglalva elmondhatjuk, hogy az előző projekt-ciklusok során kikristályosodtak olyan kutatási irányok, amelyekben a magyar matematikadidaktika meglévő hagyományaiból kiindulva érdemben hozzá tudunk járulni mind a magyar közoktatás fejlesztéséhez, mind a nemzetközi didaktikai kutatásokhoz.

Cél ezeknek a témáknak a mentén

- az előző négy éves ciklusban formálódni kezdett kutatói műhelyek stabilizálása;
- magyar kutatók nemzetközi jelenlétének erősítése, e témákban a hazai kutatások közismertté tétele;
- a hazai közoktatás támogatása, különösen hagyományos és online, széles körben elérhető tanári segédanyagok kidolgozásával, illetve tanárképzési kurzusok tartalmi és módszertani megújításával, új továbbképzési modellek kidolgozásával, új modulok beépítésével a tanárképzési, illetve továbbképzési struktúrákba.

Az új pályázati ciklus során, a korábbi és az új eredményekre alapozva – a nemzetközi kutatási trendekkel összhangban – különös hangsúlyt tervezünk helyezni a tanári munka támogatási formáinak kutatására, fejlesztésére. A projekt keretében törekszünk arra, hogy tanulók és tanárok minél szélesebb köréhez eljussunk. Kísérleteinkben különböző régiókban és településtípusokon élő, illetve dolgozó tanulókkal és tanárokkal fogunk együtt dolgozni, abban a reményben, hogy így pontosabban megérthetjük helyzetüket, szükségleteiket, együttműködésünk során reagálhatunk ezekre, és ezáltal kutatásaink, fejlesztéseink hozzájárulhatnak a magyar oktatásban tapasztalható egyenlőtlenségek csökkentéséhez. Figyelmet fordítunk arra is, hogy tanárok minél szélesebb körét megszólítsuk, beleértve olyanokat, akik eddig elszigetelten dolgoztak, a matematikatanárok közéletének fórumain nem vettek részt.

A kutatócsoport felépítése

A kutatócsoport vezetője Csapodi Csaba, egyetemi adjunktus, az ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központ vezetője, az ELTE Tanárképző Központ főigazgatója, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos munkatársa.

A kutatócsoport vezető kutatói:

- Gosztonyi Katalin (egyetemi adjunktus, ELTE TTK)
- Juhász Péter (osztályvezető tudományos főmunkatárs, HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet)
- Kónya Eszter (egyetemi docens, Debreceni Egyetem)
- Kovács Zoltán (tanszékvezető, egyetemi docens, Eszterházy Károly Katolikus Egyetem, Eger)
- Vancsó Ödön (egyetemi docens, ELTE TTK)

A fent említett személyeken túl a kutatócsoport tagja további 13 kutató magyar egyetemről (ők főleg matematika szakmódszertannal foglalkozó szakemberek), valamint 2 külföldi kutató.

A pályázat céljaival összhangban nagy hangsúlyt helyezünk a fiatal kutatók bevonására a kutatómunkába. Összesen 10 olyan nevesített résztvevője van a kutatócsoportnak, aki jelenleg a PhD tanulmányait végzi, munkája kapcsolódik valamely munkacsoport kutatásához és 7-en közülük valamely közoktatási intézményben is dolgoznak matematikatanárként.

A kutatócsoport közoktatáshoz való kapcsolódását erősíti (a fent említett, kutató és tanári szerepben egyaránt tevékenykedő személyeken kívül) 11 felső tagozatos illetve középiskolai tanár, akik a pedagógus életpálya különböző szakaszán állnak.

Ahogy a fenti számokból és adatokból látszik, a kutatócsoport több szempontból is szeretne minél szélesebb körben hatást kifejteni: a legnagyobb magyarországi matematikatanár-képzéssel foglalkozó egyetemek képviseltetik magukat a csoportban (ELTE, EKKE, DE, SzTE). Kutatásaink érintik a felső tagozattól a középiskolán át a tanárképzésig a diákokat/hallgatókat és tanáraikat/oktatóikat egyaránt. Törekszünk arra, hogy a közoktatásban dolgozó csoporttagok ne csak „elitnek” nevezett iskolákat képviseljenek a projekt során. A fent említett felsőoktatási intézményeken és a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetén túl együttműködő partnereink lesznek várhatóan azok a közoktatási intézmények, amelyeket valamely pedagógus képvisel.

A kutatócsoport tagjaként nevesített személyek mellett (akár önkéntes, akár díjazásban részesülő munkatársként) matematikatanár szakos hallgatókat, az elkövetkező időszakban felvételt nyerő PhD-hallgatókat, a kutatási témáink iránt érdeklődő aktív tanárokat, tanítókat szeretnénk bevonni a projekttel együttműködő személyek sorába.

A külföldi kapcsolatok fenntartását, fejlesztését, újak kialakítását is fontosnak tartjuk. A tervezett kutatásban együttműködő partnerként venne részt Simon Modeste és Viviane Durand-Guerrier (Université de Montpellier, Franciaország), Johann Sjuts (Universität Osnabrück, Németország), Marianna Bosch (IQS Universitat Ramon Llull, Barcelona, Spanyolország), Michiel Doorman (Freudenthal Institute, Hollandia), Stéphane Clivaz (HEP Vaud, Lausanne, Svájc), Janka Medova (University of Nitra, Szlovákia), Dirk de Bock (Catholic University Leuven, Belgium), Földesi Katalin (Svédország), Ioannis Papadopoulos (Aristotle University of Thessaloniki, Görögország), Maria Alessandra Mariotti (University of Siena, Olaszország).

A határon túli magyar közösség matematikatanítási intézményeit is bevonjuk a kutatásba: a kutatócsoport tagjai között szereplő erdélyi kollégák mellett együttműködünk felvidéki és kárpátaljai kutatókkal és tanárokkal is.

A projekt megvalósítása altémákra bontva több párhuzamos, de együttműködő munkacsoportban fog zajlani. A projekt résztvevői sok esetben több altéma feldolgozásában is közreműködnek. Az egyes munkacsoportok tervezett tevékenységét alább, a részletes munkatervben nevesítjük.

Várható eredmények, hasznosulás

A projekt várható eredményeit alább, a részletes munkatervben fejtjük ki, altémánként csoportosítva. Itt a várható összhatásokat, a projekt várható hasznosulásának területeit, az ezzel kapcsolatos főbb tervezett mérföldköveket foglaljuk össze.

A projekt megvalósulása esetén a kutatócsoport munkája és eredményei a hazai matematikaoktatás igen széles körére gyakorolhatnának hatást. A kutatócsoport tagjai közül többen részt vettek a Nemzeti alaptanterv 2020-as átdolgozásában, az ezekhez kapcsolódó tankönyvi munkálatokban valamint az új tanárképzési struktúra 2021-es kialakításában, amely munkák során már tudtuk hasznosítani a korábbi pályázatok eredményeit, és sikerült is olyan változásokat eszközölni a köz- és felsőoktatás tartalmi szabályozóiban és taneszközeiben, melyek a jelenlegi projekt céljaival is összhangban vannak.

A tantervi és tankönyvi beépülés mellett nagyon fontos közoktatási hatással járhat a kutatócsoport tagjainak meghatározó jelenléte a hazai felsőoktatás tanárképzésében (Budapest, Szeged, Eger, Debrecen). A jelenleg éppen átalakulás alatt álló tanárképzés módszertani kurzusainak tartalmát és módszereit a korábbi és az új eredmények felhasználásával tervezzük kialakítani. Ahogy az előző pályázat során is több tanárszakos kurzushoz készült új jegyzet, segédanyag, úgy a jelenlegi pályázat alatt is tervezzük a matematika tanárszakos kurzusok megújítását a kutatási eredményekkel összhangban.

A pályázat kiemelt célja a már pályán lévő matematikatanárok módszertani fejlődésének támogatása is, ennek érdekében új, korszerű (kutató és tanár partneri viszonyára épülő) tanártovábbképzési formák és konkrét modulok kidolgozásával, illetve különböző (a kutatás során kipróbált és hatékonynak bizonyult) módszertani segédanyagok nyilvánosságra hozásával. Alapvető céljaink között szerepel egy olyan honlap létrehozása, amelyen keresztül a korábbi és az új projektek során elkészített és kipróbált tanítási segédanyagok mindenki számára elérhetők lennének.

Céljaink között szerepel továbbá, hogy felkeltsük a kutatásban részt vevő (a pályázati anyagban nem nevesített, de bevonni tervezett) matematika tanárszakos hallgatók és már aktív tanárok érdeklődését a módszertani kutatások iránt, szeretnénk, ha minél többen jelentkeznének PhD hallgatónak, válnának mestertanárrá, kutatótanárrá az elkövetkező években.

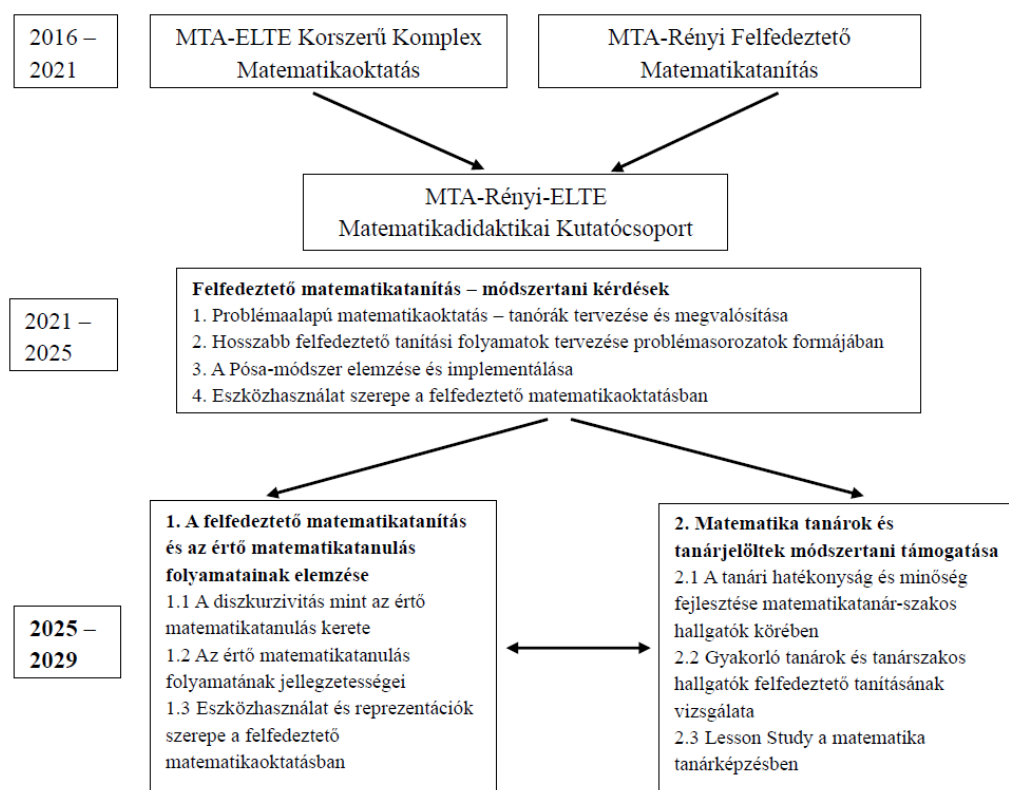
Fontos tervünk az előző projekt során kutatott, a hazai közoktatásból hiányzó matematikai statisztika elemeinek tantervi kidolgozása (Vancsó et al., 2022, Fejes-Tóth, Vancsó, 2024, Fejes-Tóth et al., 2024 benyújtott).

Végül, de nem utolsó sorban szeretnénk további lépéseket tenni a hazai matematika szakmódszertani közösség intézményesülésének irányában. Az előző pályázat egyik nagy eredménye volt a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben a Szakmódszertani Osztály megalakulása, szeretnénk tovább folytatni és támogatni ennek a közösségnek a tevékenységét. Az egyik konkrét terv egy rendszeres országos matematikadidaktikai kutatószeminárium beindítása a projekt résztvevőinek vezetésével.

Ami a projekt nemzetközi téren való megismertetését jelenti: aktív részvételt tervezünk különféle nemzetközi matematikadidaktikai konferenciákon. A projekt finanszírozása lehetővé tenné a pályázati ciklusba eső CERME (európai) és ICME (világméretű) konferenciákon nagyobb magyar delegáció részvételét; emellett több kisebb, tematikus konferencián is tervezzük képviseltetni magunkat. Aktív publikációs tevékenységet tervezünk, növelve a magyar didaktikai kutatások súlyát rangos nemzetközi folyóiratokban és gyűjteményes kötetekben. Határozott célunk, hogy a matematikadidaktikai publikálás még inkább a minőség, azaz a Q1 és Q2 besorolású folyóiratbeli publikációk felé mozduljon el.

Részletes munkaterv

Az alábbi ábra bemutatja a jelenlegi pályázat előzményeit és az elkövetkező időszak terveit.



Ebben a részben részletezzük kutatócsoportunk munkatervét, a kutatási kérdéseket és módszereket, valamint a tervezett ütemezést altémánkénti bontásban. A két fő kutatási irány további altémákat vizsgál, illetve fontos megjegyezni, hogy az altémák eredményei a két kutatási irány között is hatni fognak egymásra.

1. A felfedezettő matematikatanítás és az értő matematikatanulás folyamatainak elemzése

2021 és 2025 között az aktív tanulás és a problémaorientált matematikatanítás számos aspektusát vizsgáltuk. Az alábbiakban az új ciklus közvetlen előzményének tekinthető eredményeket emeljük ki. Az “értelemalkotó algebra” dizájn kísérlet alapján megállapítottuk, hogy a matematikai általánosítás folyamata kulcsfontosságú az aritmetikai-algebrai átmenet elősegítésében, ugyanakkor a többszörös reprezentáció hatékonyságát a diákok önszabályozó képessége határozza meg. Esettanulmányokkal erősítettük meg, hogy a problémaalkotás alkalmazásával mélyebb matematikai fogalmak építhetők ki, ezáltal elősegítve a koncepcionális megértést. Problémaalapú tanórák tervezésével és megfigyelésével azt tapasztaltuk, hogy a diákok motivációja és bevonódása jelentősen növekedett, miközben metakognitív tevékenységeink vizsgálata rávilágított a tanári útmutatások szerepére az oktatási folyamatban. Emellett feltérképeztük a digitális eszközök és interaktív technológiák használatát, melyek lehetővé tették számunkra egy differenciált, az értő matematikatanulást támogató pedagógiai megközelítés kialakítását. Eredményeink megalapozzák az új kutatási ciklusunkat, melyben célunk a problémaközpontú tevékenységek további finomítása, a tanári beavatkozások optimalizálása, illetve a digitális technológiák integrációjának kibővítése az osztálytermi gyakorlatban, ezáltal elősegítve a tanulók matematikai megértésének fejlődését.

Ahogy azt a pályázatunk tudományos háttérének felvázolása során jeleztük a felfedezett matematikatanítás egyik irányzatának, az értő matematikatanulásnak a folyamatát hosszú ideje vizsgálják a kutatók (Kieran, 2007; Martin, 2009; Schoenfeld, 2013), különösen a fogalmi tudás kialakításának kontextusában (Kónya & Kovács, 2023; Skemp, 1971; Star, 2005). Az értő tanulás ebben az értelmezésben nem pusztán a matematikai tartalmak és eljárások elsajátítását jelenti, hanem olyan aktív, személyes és kontextushoz kötött folyamatot, amely során a tanulók új fogalmakat a meglévő tudásukhoz kapcsolva építenek be a kognitív rendszerükbe (Martin, 2009). Ez a folyamat az értelmezés, rendszerezés és az asszimiláció-akkomodáció folyamatán keresztül segíti elő a matematikai kompetencia fejlődését. Az értő matematikatanulás elméleti háttére több pedagógiai és pszichológiai hagyomány szintézisére épül: ide tartozik a konstruktivista megközelítés (Thompson, 2020), az aktív tanulás (Polya, 1981), a problémaalapú tanulás (Csíkos, 2010; Kónya & Kovács, 2022), valamint a sémák szerint történő tudásépítés (Skemp, 1971). A tanulók mély megértését elősegítő didaktikai eszközök közé sorolható a felfedezést igénylő problémák alkalmazása, a problémaalkotás, a többféle reprezentáció használatának ösztönzése, valamint az együttműködésen alapuló tanulás. A magyar matematikatanítási hagyományban ennek a megközelítésnek a gyökerei megfigyelhetők Varga Tamás munkásságában is (Gosztonyi, 2019, 2020).

Kutatásaink várhatóan hozzájárulnak az értő matematikatanulást támogató tanítási módszerek gyakorlati megalapozásához. Az eredmények hosszú távon támogatást nyújthatnak pedagógusok számára abban, hogy tanítási gyakorlatukat a tanuló fogalmi megértése fejlesztésének irányába alakítsák. A pályázati időtartam alatt a kifejlesztett oktatási segédanyagokat online hozzáférhetővé tesszük.

1.1 A diszkurzivitás mint az értő matematikatanulás kerete

A matematika órákon megfigyelhető szakmai kommunikációt a szakirodalom *matematikai diskurzus*nak nevezi, beleértve a tanár-diák és a diák-diák párbeszédet. Ezek révén a diákok a matematikai gondolatok megértési folyamatában közösen vesznek részt, hiszen elemzik, összehasonlítják nézeteiket, érveiket (Stein et al., 2008). Az értelmes matematikai diskurzus során a tanulók a matematikai közösség aktív tagjai, akik egyszerre képesek elmagyarázni saját gondolataikat és válaszolni társaik felvetéseire. Sfard (2008) szerint a gondolkodás során saját magunkkal is kommunikálunk, vagyis a kommunikáció, legyen az hangos vagy belső, a gondolkodási folyamat velejárója. A produktív diskurzus eredményeképpen az adott matematikai ismeret (tananyag) értő tanulása valósul meg, az egyén vagy a közösség akár új tudáselemeket is konstruálhat.

A diszkurzivitás mint az értő matematikatanulás egyik alappillére a magyar matematikatanítási hagyományokban régtől jelen van. Pólya (1968) aktív, felfedező matematikatanulásról beszél, ahol a megfelelő tanári kérdések, utasítások kulcsszerepet kapnak. Varga Tamás (1988) komplex tanítási kísérletében nagy hangsúlyt helyez a közös megbeszélésekre, ahol az egymás segítése, az egymástól tanulás, egymás meggyőzése kiemelt szerepet kap.

Kutatásunkban a diszkurzív matematikatanulási kerethez szorosan kapcsolódva kiemelten foglalkozunk néhány didaktikai paradigmával. Probléma alapú tananyagfeldolgozás, melynek fő vonásai, hogy a tanulók valamilyen problémahelyzetet elemeznek, kritikusan viszonyulnak saját és társaik gondolatmenetéhez, és megtanulják elmagyarázni, igazolni saját gondolataikat. (Csíkos, 2010). Egy-egy matematikai ismeret mélyebb megértéséhez az észlelési változatosság (Dienes, 1973), vagy másképpen a többféle reprezentációban rejlő lehetőség szervesen hozzájárul, ráadásul ezek elemzése a diskurzushoz is alapot teremt. Ugyancsak az aktív, diskurzusokra építő tanulási módszerhez illeszkedik az ún. variációs elv alkalmazása, melynek során az új ismeret elsajátításához az út a jól megválasztott példák feldolgozásán keresztül vezet.

A belső és külső diskurzusok a gondolkodás és kommunikáció egysége révén a metakognitív képességek fejlődéséhez is hozzájárulnak. A diszkurzív megközelítésben a tanár facilitátori, háttérből irányító szerepkörbe kerül. Ebben a vonatkozásban a stratégiai iránymutatások (promptok) kiemelt hangsúllyal bírnak.

Kutatási kérdések és módszerek

- Hogyan jellemezhetők az osztályteremben megfigyelt diszkurzív epizódok?

Akciókutatásokat és dizájn kutatásokat tervezünk a probléma alapú tananyagfeldolgozás, az észlelési változatosság, a variációs elv megvalósíthatóságára a normál tanterv szerint haladó 5-12. évfolyamos matematikaórákon. Az osztályteremben megfigyelt diskurzusok elemzésére egy elméleti keretrendszert dolgozunk ki, majd ennek alkalmazhatóságát további kutatási ciklusokban vizsgáljuk.

- Mitől lesz eredményes a tanár stratégiai beavatkozása a matematikaórán?

A tanár facilitátor szerepének jobb megértése érdekében az osztálytermi diskurzusok során a tanári iránymutatások típusait kategorizáljuk és azok hatásait elemezzük.

Kvalitatív kutatási módszereket alkalmazunk. Többciklusú dizájn- és akciókísérletek keretében elsősorban az osztálytermi megfigyelések alapján gyűjtjük az adatokat (videó- és hangfelvételek, feljegyzések). A tanári, tanulói véleményeket a kikérdezés (kérdőív, interjú) módszerével tárjuk fel.

Ütemezés

2025/26: szakirodalmi háttér feltárása

2026/27: a dizájn- és akciókutatások első ciklusa, az elért eredmények publikálása

2027/28: a dizájn- és akciókutatások második ciklusa

2028/29: a kísérletek értékelése, a kutatási eredmények publikálása

1.2. Az értő matematikatanulás folyamatának jellegzetességei

A matematikatanulás kognitív folyamataival kapcsolatos kutatások az értő tanulás képességének fejlődését mutatják az életkor növekedésével (Matney et al., 2022). A fiatalabb tanulók inkább a kognitív folyamatokra összpontosítanak, míg az idősebb tanulók több metakognitív stratégiát alkalmaznak (Sahbari et al., 2014). Ezért tartjuk fontosnak a problémaszituációra vonatkozó matematikai sejtéstől a bizonyításig tartó folyamat tanulmányozását különböző életkorokban. A kidolgozott elméleti kereteket (Boero, 2016; Garuti et al., 1998) eddig szórványos empirikus kutatásokban vizsgálták (pl. Mariotti et al., 2023), ezért válik szükségessé a különböző életkorokon átívelő kutatás alkalmasan választott problémákon keresztül. Ilyen problémátípus lehet a mintakeresés mint heurisztikus stratégia, amelyre vonatkozóan már végeztünk kutatásokat (Kónya & Kovács, 2018). Fontos annak vizsgálata is, hogy milyen módszerek segíthetik az értő tanulást. Az osztálytermi környezetnek, különösen a tanároknak fontos szerepük van az értő matematikatanulás elősegítésében (Fitzgerald & Palincsar, 2019), így a tanár támogató tevékenysége is kutatásunk témája. A tanulási környezetnek elválaszthatatlan része a digitális technológia, az interaktív akció-technológiáktól (pl. dinamikus geometriai, komputeralgebrai és táblázatkezelő alkalmazások) kezdve (Kovács & Wintsche, 2025) a generatív mesterséges intelligenciáig terjedően. Ezeknek az eszközöknek a megjelenése kiemeli a kritikai gondolkodás mint alapvető készség, illetve az ember-gép kommunikáció minőségének fejlesztését, szoros összefüggésben a metakognitív tevékenységekkel. A kutatások még távolról sem lezártak, az erre vonatkozó ismeretek bővítését szintén célul tűzzük ki.

Kutatási kérdések és módszerek

- Hogyan valósul meg a sejtésből kiinduló, bizonyításig/cáfolatig tartó folyamat kognitív egysége a tanulók gondolkodásában?

A szakirodalom megerősíti, hogy a matematikai fogalmak konceptualizálását a problémamegoldás segíti. Ez a folyamat azonban életkoronként különböző lehet. Az életkori sajátosságok megértése a kutatásunk célja, melynek eredményeként életkor-specifikus módszerek fejlesztését tűzzük ki célul.

- Hogyan hat a digitális technológia a tanulók kritikai gondolkodására és értelemalkotó matematikai tevékenységeire?

A különböző interaktív akció-technológiák és generatív nyelvi modellek segíthetik a sejtési bizonyítási folyamatot, ugyanakkor részben "black-box" módon működnek. A válaszok értékelése, értelmezése a tanulótól kritikai gondolkodást igényel. A kutatásunkban olyan problémátípus fejlesztését szeretnénk elérni, amelyre a technológia nem ad választ de a problémamegoldás folyamatát támogatja.

A kutatás kvalitatív megközelítésen alapul, esettanulmányok, osztálytermi megfigyelések, kvalitatív tartalomelemzés és félig strukturált interjúk alkalmazásával, melyek együttesen a kutatási eredmények megbízhatóságát növelik a triangulációs módszerre alapozva. Az esetek célirányosan kerülnek kiválasztásra olyan tanítási-tanulási szituációkból, ahol hangsúlyos szerepet kap a tanulók aktív részvétele, a problémaalkotás és az érvelés.

Ütemezés

2025/26: a kutatás elméleti megalapozása, szakirodalmi háttér feltárása

2026/27: esettanulmányok tervezése, osztálytermi megfigyelések, adatgyűjtés (első ciklus), publikációk

2027/28: interjúk lebonyolítása, osztálytermi megfigyelések (második ciklus)

2028/29: adatfeldolgozás, összegző elemzés, publikációk

1.3. Eszközhasználat és reprezentációk szerepe a felfedezettő matematikaoktatásban

A szemléletesség fontos szerepet játszik a magyar 'heurisztikus' matematikafelfogásban (Gosztonyi, 2016). A sokféle manipulatív és szemléltetőeszköz illetve a változatos reprezentációk használata fontos szerepet tölt be a felfedezettő matematikaoktatás hagyományaiban, de annak eddig viszonylag keveset elemzett területe (bár több doktori kutatás is folyamatban van a témában).

A manipulatív eszközökre és reprezentációkra helyezett hangsúly természetesen nem magyar sajátosság, a matematikaoktatásban évtizedek óta jelentős figyelem irányul rá. Piaget, Dienes és mások munkái során már a XX. század második felében számos kifejezetten matematikai célú szemléltetőeszköz készült, és több matematikadidaktikai elmélet (pl. Bruner, Olver & Greenfield, 1966; Duval, 2017; Vergnaud, 2009) helyezi előtérbe a reprezentációk szerepét a matematika tanulásában. Ami a Varga Tamás-féle felfedezettő matematikaoktatásban különösen kiemeli a reprezentációk szerepét, az a formális matematikai nyelvhasználat hangsúlyozottan késleltetett bevezetése és a nagyon hosszan elnyúló, tevékenységeken alapuló előkészítése: Vergnaud (2009) fogalmaival élve, az operatív tudás különösen hosszan, akár éveken át tartó építése és a predikatív tudás lassú bevezetése. Jelenlegi értelmezésünk szerint ezt a folyamatot támogatja a változatos eszközök és reprezentációk használata, mivel ezek akár éveken át a közös (osztályon belül, tanár és diákok között megosztott) operatív tudás hordozói lehetnek anélkül, hogy annak formalizálására, predikatív formába öntésére feltétlenül szükség lenne. A fel-

fedeztető matematikaoktatásban központi szerepet játszó osztálytermi dialógusok feltételezésünk szerint részben szintén ezekre a reprezentációs eszközökre támaszkodnak, így a két szempontot: a reprezentációk és a tanár-diák dialógusok szerepét érdemesnek tűnik egymással összefüggésben elemezni. Ehhez Vergnaud *Fogalmi mezők elmélete* (2009) legalább részben alkalmas elméleti háttérrel szolgált.

Kutatásaink következő szakaszában tehát külön hangsúlyt szeretnénk fektetni az eszközök és reprezentációk szerepére és jobban megérteni, hogyan és milyen szerepet játszanak ezek a felfedeztető tanítási folyamatokban. Egy vagy két konkrét matematikai témakört kiválasztva mind tankönyveket és egyéb segédanyagokat, mind tanórákat tervezünk elemezni ebből a szempontból. Célunk, hogy ennek a kérdésnek a tisztázásával pontosabban megértsük, hogyan támogatjuk a tanárokat a felfedeztető oktatás gyakorlatának elsajátításában.

Kutatói kérdések

- Milyen szerepet játszanak a manipulatív és szemléltetőeszközök, illetve a különböző reprezentációk a tanulók matematikai ismereteinek építésében a felfedeztető matematikaoktatás során? Hogyan működnek közre az operatív tudás építésében, illetve az operatív és predikatív tudás közötti átmenetben?
- Mi a szerepe a különböző eszközöknek és reprezentációknak a felfedeztető tanórákra jellemző tanár-diák interakciókban? Hogyan támaszkodik ezekre a tanár a kollektív felfedezési folyamat előremozdításában?

Módszerek és ütemezés

A projekt első két évében tankönyveket, írott segédanyagokat illetve korábban készült tanórafelvételeket elemzünk a használt eszközökre, vizuális reprezentációkra, ehhez kapcsolódó fizikai gesztusokra koncentrálva, és ezek szerepét vizsgálva a tanórai interakciókban és a matematikai fogalomépítés folyamatában.

A projekt második két évében újabb órafelvételeket is készítünk és részben tapasztalt, felfedeztető módon tanító tanároknál, részben kezdő illetve felfedeztető oktatásban járatlan tanárok óráin. E felvételeken elemezzük az eszközök és reprezentációk használatát, szerepét a matematikai gondolkodás fejlesztésében. A különböző háttérű tanároknál készül felvételek összehasonlítása alapján koncepciót dolgozunk ki a tanári készségek fejlesztésére az eszközhasználat és a reprezentációk területén, amelynek révén hosszabb távon mind az alapképzés, mind tanártovábbképzések fejleszthetők.

2. Matematikatanárok és tanárjelöltek módszertani támogatása

Ahogy arra korábban rámutattunk: az iskolák és az egész oktatási rendszer eredményessége nagymértékben a pedagógusok munkáján múlik. A tanári minőség mellett a tanári hatékonyság is a hazai és nemzetközi kutatások középpontjában áll (Anderson, 1991; Fejes és társai, 2022; Prendergast, O'Donoghue, 2014, Zétényi, 1998). Ezért elengedhetetlen, hogy választ keressünk arra az alapvető kérdésre, hogy mitől válik egy tanár eredményessé. A pedagógiai kutatások azt is kimutatták, hogy a matematika tanításának felfedeztető, a tanulót a középpontba helyező módja jelentősen javítja a tanulói eredményességet és motivációt a matematikai és egyéb területeken is. (Laursen, Rasmussen, 2019).

2.1. A tanári hatékonyság és minőség fejlesztése matematikatanár-szakos hallgatók körében

A szakirodalom alapján megkülönböztetjük a *tanári hatékonyságot* és a *tanítási hatékonyságot*. Ha a hatásokat a tanárnak mint egyénnek vagy az egyén sajátos jellemzőinek tulajdonítjuk, akkor tanári hatékonyságról (teacher effectiveness) van szó, ha a tanári tevékenységből származó folyamatoknak tulajdonítjuk akkor tanítási hatékonyságról (teaching effectiveness) beszélünk. (Scheerens, Blömeke, 2016) Fentiek miatt kutatásunk középpontjában jelenleg annak a vizsgálata áll, hogy hogyan tud hozzájárulni az egyetemi tanárképzés a tanári minőség és hatékonyság kialakításához, fejlesztéséhez. Tovább szűkítve a kérdést, jelen kutatási pályázatban a matematika-tanárszakos hallgatókat szeretnénk vizsgálni. Mindezt egy olyan időszakban kutatjuk, amikor a tanárképzés éppen jelentősen átalakul, és így lehetőségünk nyílik az átalakulást összehasonlító elemzések készítésére felhasználni. A 2021 és 2025 közötti pályázati időszakban jelentős eredményeket értünk el a diszkrét matematika és a statisztika tanításának kutatásában, mely eredményeket szeretnénk az átalakuló tanárképzésben megjeleníteni. Végül, de nem utolsósorban arra is kíváncsiak vagyunk, hogy vajon mennyire egységes az egyetemi tanárképzésben résztvevő sok különböző szereplő (egyetemi módszertanos oktató, gyakorlóiskolai vezetőtanár, partneriskolai mentortanár) elképzelése arról, hogy mitől lesz hatékony, mitől lesz minőségi a tanári munka.

Kutatási kérdések és módszerek

- Milyen tényezőkön múlik a tanári hatékonyság, illetve minőség? Melyek azok a tényezők, amelyek a (matematika) tanárképzés során befolyásolhatók, fejleszthetők és milyen módon lehet ezeket hatékonyan fejleszteni?

Szisztematikus és széleskörű szakirodalmi áttekintést tervezünk elvégezni a releváns nemzetközi szakirodalom bevonásával.

- Mit gondolnak a matematika tanárképzésben részt vevő különböző szereplők arról, hogy mit jelent a tanári hatékonyság és minőség? Mennyire körülhatárolt, mennyire egységes a fenti szereplők erről alkotott képe? Mit gondolnak ezek fejlesztési lehetőségeiről? Valamint: milyen viszonyban van egymással a matematikatanár képzés képzési és kimeneti követelményeiben (KKK) megfogalmazott cél- és elvárásrendszer a képzés végére a hallgatók által elért tudással, kompetenciákkal és attitűddel?

A matematikatanári képzési és kimeneti követelmények (KKK) feldolgozása és a tanárképzésben résztvevő különböző szereplők megkérdezése.

- A kapott tényezőket tekintve kimutatható-e különbség a 2022 előtt és a 2022 után megkezdett, átalakított képzést elvégző matematika tanárszakos hallgatók hatékonyságát, illetve minőségét tekintve?

2026/27. tanévben egyszerre végez a 2022 előtti képzés utolsó, és az átalakított képzést végző első évfolyam (mivel a képzés időtartama 6-ról 5 évre csökken). Ez lehetőséget ad arra, hogy egyszerre tudjuk vizsgálni a két képzésben részt vevő végzős hallgatókat és ilyen módon választ kaphatunk a kérdéseinkre. A kutatásba bevonjuk a gyakorlóiskolák vezetőtanárait (ők a szaktárgyi tanítási gyakorlatot végző hallgatók tanári kompetenciáit tudják összehasonlítani), valamint a partneriskolai mentortanárokat (az összefüggő egyéni iskolai gyakorlat összehasonlítása) és az egyetemi szakmódszertanos oktatókat (az összefüggő gyakorlatot kísérő szakos szeminárium vonatkozásában).

Kvalitatív és kvantitatív kutatásokat egyaránt tervezünk végezni.

Ütemezés

2025/2026: kutatások megalapozása, elméleti alapok meghatározása, a kutatás során használni kívánt szakfogalmak egységes definiálása; szakirodalmi áttekintés, kurzusfejlesztés

2026/2027: szakirodalmi áttekintés publikálása, fejlesztett kurzus kipróbálása, összehasonlító kutatás elvégzése

2027/2028: összehasonlító kutatás eredményeinek elemzése

2028/2029: összehasonlító kutatás eredményeinek publikálása, hazai és nemzetközi disszemináció, szakpolitikai javaslatok megfogalmazása a tanárképzés fejlesztésére

2.2. Gyakorló tanárok és tanárszakos hallgatók felfedezettő tanításának vizsgálata

Ahogy azt a pályázatunk tudományos háttérének felvázolása során jeleztük a kutatócsoport érdeklődésének középpontjában a felfedezettő matematikaoktatás áll. Kutatások igazolják, hogy az ezzel a módszerrel tanuló diákok a problémamegoldó gondolkodásmód segítségével sikeresen nézzenek szembe a 21. század kihívásaival (Dorier & Maass, 2014). Ennek ellenére a magyar matematikatanárok kis hányada tanít csak felfedezettő módszerrel. A kutatócsoport egyik fő célja annak vizsgálata, hogy hogyan lehet a magyar közoktatásban, azon belül is felső tagozaton és középiskolában elterjeszteni a felfedezettő matematikaoktatást.

A központi szabályozók, tantervek és irányelvek gyakran kevésbé hatékonyak a tanítási módszerek elterjesztésében. Ezt mind a magyar, mind a nemzetközi szakirodalom dokumentálja (Varga, 1987; Gosztonyi et al., 2018, Pepin, 2018). Több siker remélhető a tanárok saját motivációjából, önkéntes alapon történő csatlakozásától, és kiemelt fontosságú a fiatal tanárok megnyerése. Ennek apropóján szeretnénk megvizsgálni, hogy milyen módon lehet a tanárszakos hallgatók számára a módszert vonzóbbá, elérhetőbbé tenni. Szeretnénk kipróbálni, hogy a korábbi esettanulmányunkban vizsgált felfedezettő módon való mentorálás szélesebb körben is hatékonynak bizonyul-e. Ennek előkészítéseként felmerült, hogy szabadon választható tárgyat indítsunk a témában. Szeretnénk továbbá megvizsgálni, hogy a pályakezdő tanárok körében mitől válik megfontolandó lehetőségnek, hogy ezzel a módszerrel, vagy legalább a módszer bizonyos elemeit alkalmazva tanítsanak. Ennek egyik eszközeként egy olyan közösség létrehozása is kívánatos lenne, ahol az ilyen módon tanító tanárok, illetve a módszer iránt érdeklődők megtalálják, megismerik egymást, tudják egymást segíteni, tapasztalatot cserélni, illetve egymást támogatni, biztatni a tanítás nehézségei közepette. Szeretnénk megtalálni azt a néhány embert, aki motorja lenne ennek a közösségnek, és saját személyes ügyének érezné a felfedezettő tanítás minél szélesebb körben történő elterjesztését.

Abban hiszünk, hogy konkrét tananyagokkal, kidolgozott óratervekkel tudjuk igazán meggyőzni a tanárokat arról, hogy érdemes ezt a módszert választani, és ők is képesek ilyen módon tanítani. Így mindenképpen a munkánk részét képezi, hogy további felfedezettő szemléletű tananyagokat dolgozzunk ki a felső tagozatosok és középiskolások számára. Ennek kapcsán megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen technikai háttér (honlap) segítené leginkább a célcsoport munkáját, illetve a kitűzött cél elérését. Az eddig kidolgozott tananyagainkról azt gondoljuk, hogy színvonalasak, de egyelőre mostani formájukban még nem alkalmasak arra, hogy pusztán az alapján lelkesítse, motiválja a tanárokat a felfedezettő módon történő tanítás irányába. Tanári workshopokat már korábban is tartottunk felfedezettő oktatás témában, ennek tapasztalatait azonban még elemezni szeretnénk, illetve tovább kísérletezni azzal, hogy hogyan tudjuk ezeket az alkalmakat még hatékonyabbá tenni. Folytatnánk olyan workshopok szervezését, amelyek a felfedezettetésben nem járatos tanároknak szólnak, és a résztvevőkkel kooperálva próbálnánk fényt deríteni arra, hogy mitől tudnak igazán jók lenni ezek az alkalmak. Illetve olyan workshopokat is szerveznénk, ahol ebben az oktatási módszerben már járatosabb tanárokkal dolgoznánk

együtt, és megpróbálnánk felfedezettő matematikatanítási kérdésekre keresni a választ felfedezettő módszert alkalmazva. Megvizsgálnánk azt a kérdést is, hogy a tanári együttműködés működőképes-e kétheti vagy havi rendszerességgű online találkozók formájában.

A felfedezettő módszert alkalmazó, gyakorló tanárok bevonásával indítanánk el rendszeres találkozók sorozatát, és az ő véleményük alapján alakítanánk ki a találkozók formáját, beleértve azok gyakoriságát, hosszát, de legfőképpen a tematikáját, és napirendi pontjait. A felfedezettő módszer kiegészítő eleme lehet az, hogy havonta-másfélhavonta a tanulócsoporthoz a tanár olyan órát tart, amelyen a matematika hasznos, érdekes, kevésbé ismert alkalmazásait mutatja be a diákok számára. Itt a középiskolai tananyagon túlmutató területekről esik szó, de ez növelheti a matematika hitelét, érdekességét, hasznosságát a diákok megítélésében és több diákot sarkallhat arra, hogy a jövőben matematikai pályát válasszanak. A csoport annak a vizsgálatát is tervezi, hogy hogyan lehet ilyen órák anyagát kidolgozni, a tanárok számára úgy elérhetővé tenni, hogy a tanárok kellő útmutatást kapjanak ahhoz, hogy magabiztosnak érezzék magukat a témában, ugyanakkor megfelelő mértékű mozgásteret is biztosítsunk nekik abban, hogy az anyagokat a saját elképzeléseiknek megfelelően formálják.

Kutatási kérdések

- Mik a leghatékonyabb eszközei annak, hogy tanárszakos hallgatók és pályájuk elején lévő tanárok biztatást és érdemi segítséget kapjanak ahhoz, hogy felfedezettő módon tanítsanak?
- Melyek a tanárok felé történő tudástranszfernek azok a módjai, illetve az az optimális mennyisége, ami a tanítási gyakorlatukba beépülve is hasznosul?
- Hogyan lehet hatékonyan megosztani a felfedezettő tanítási szemléletű tananyagokat?
- Mi az a technikai megoldás, amely leginkább támogatja a tanárokat?
- Lehet-e javítani a diákok matematikához való viszonyát azzal, hogy tananyagon kívül, a szokásos óráktól eltérő foglalkozásokon vesznek részt, amelyek a matematika hasznos, érdekes, kevésbé ismert alkalmazásait mutatják be a diákok számára?

Tervezett kutatási módszerek, tevékenységek

- Tervezés alapú kutatás: az elmélet és korábbi tapasztalatok alapján módszereket dolgozunk ki (például tanárképzésre, közösségépítésre, tananyagok publikálására), ezeket megvalósítjuk, adatgyűjtés után elemezzük, és ennek tükrében továbbfejlesztjük (Cobb et al., 2003).
- Tematikus analízis: ez egy olyan kvalitatív módszer, aminek segítségével szövegeket (interjúk, beszélgetések, kérdőívek kifejtő kérdései) kódolunk, témákra bontunk, és ez alapján narratívát írunk, majd azt elemezzük (Braun & Clarke, 2012).
- Kvantitatív módszerek: tanárok által kitöltött kérdőívek számszerű adatait elemezzük (Kelle & Buchholtz, 2015).

Főleg kvalitatív kutatásokat tervezünk végezni, de bizonyos esetekben kvantitatív módszereket is fogunk alkalmazni.

Ütemezés

2025/2026: A tanári közösség építésének megkezdése, a lehetőségek megvizsgálása, a körülményekhez képest legjobb módszer kiválasztása. Néhány workshop tartása egyrészt tanárok toborzása céljából, másrészt a workshop módszertanának fejlesztése céljából.

2026/2027: Kidolgozott tananyagok kipróbálása gyakorló tanárok segítségével, az oktatás mentorálása. Az első évben kiválasztott módon tartott összejövetelek, közös munka folytatása.

2027/2028: Tanárok és az általuk tanított diákok körében különböző adatfelvételek elvégzése, mely alapot ad a kvalitatív értékeléshez.

2028/2029: A kutatások publikálása, hazai és nemzetközi disszemináció

2.3. Lesson Study a matematika tanárképzésben

A Lesson Study Japánból származó formája a tanárok közötti, illetve tanárok és kutatók közötti együttműködésnek, amelyet a tanítás fejlesztése mellett tanárképzésre és tanártovábbképzésre is használnak. A Lesson Study módszere, különféle adaptációkkal, mára világszerte elterjedt és számos kutatás bizonyítja a tanári tudás és készségek fejlődésére gyakorolt, széleskörű pozitív hatásait (Huang, Takahashi & da Ponte 2019, Ding et al. 2024). A Lesson Study jellegzetessége a csoportos óratervezés és a ciklikus építkezés: a csoport egy kiválasztott témakört feldolgozva közösen tervez meg egy órát, ezt egyikük megtartja, a többiek megfigyelik, majd a tapasztalatokat közösen feldolgozva fejlesztik tovább az óratervüket. A folyamat során több ilyen Lesson Study kör megvalósítható.

A 2022-ben bevezetett új tanárképzési struktúra, nevezetesen a csoportos tanítási gyakorlat elnevezésű kurzus megjelenése lehetőséget teremt arra, hogy ezt a módszert a magyarországi tanárképzésben is intézményes szinten meghonosítsuk. E kurzus keretében ugyanis a hallgatók csoportosan hospitálnak, közösen terveznek és tartanak órákat egy vezetőtanár és egy egyetemi oktató közös irányításával. Az ELTE matematika tanárképzésében (tudomásunk szerint az országban és az ELTE különböző tanárszakjai között is egyedülálló módon) az egyik módszertani kurzusunkat (Matematika tanítása 3.) hozzárendeltük a csoportos tanítási gyakorlathoz, így teremtve bőséges időt arra, hogy a hallgatókkal közösen készüljünk első óratartásukra. A jelenlegi konstrukció azt is támogatja, hogy a hallgatók két különböző osztályban tartsák meg ugyanazt az órát néhány hét különbséggel: így két Lesson Study kör megvalósítására nyílik lehetőség.

Jelen félév során először valósult meg ez a kurzus, és bár formális kutatás egyelőre nem kapcsolódott hozzá, a tapasztalatok alapján a létrehozott keretek érdemben támogatják a hallgatók színvonalas közös óratervezését és ezzel összefüggésben a szakmai fejlődését. Egyúttal kérdések, dilemmák is felmerültek a kurzussal kapcsolatban (pl. az óratervezés folyamatának vezettségére, az oktatói beavatkozások jellegére vonatkozóan). A következő években szeretnénk továbbfejleszteni a kurzust és ahhoz kapcsolódó oktatói gyakorlatunkat a Lesson Study módszerrel kapcsolatos kutatások tanulságait beépítve. Ennek érdekében megkezdtük egy együttműködés kiépítését a Lesson Study matematika tanárképzésbeli felhasználásának egyik kiemelkedő európai szakértőjével, Stéphane Clivaz-val (Lausanne, Svájc). Cél továbbá, hogy formális kutatás keretében vizsgáljuk a kurzusnak a hallgatók szakmai fejlődésére gyakorolt hatását.

Kutatói kérdések

- Mennyire felelnek meg az ELTE matematika tanárképzésében kialakított keretek a Lesson Study gyakorlatának? Milyen dilemmákat vet fel a Lesson Study alkalmazása ebben a kontextusban, és ezek hogyan oldhatóak fel?
- Mennyiben járul hozzá a Lesson Study alapú kettős kurzus a hallgatók szakmai fejlődéséhez?

Munkaterv

Az első év során részletesen tanulmányozzuk a Lesson Study tanári alapképzésben való alkalmazásáról szóló szakirodalmat és a friss vagy jelenleg is futó kutatások, projektek tapasztalatait. Ezzel összefüggésben, és külföldi szakértőkkel konzultálva fejlesztjük tovább a kurzus struktúráját. Elemezzük a külföldi tapasztalatok során felmerülő dilemmákat, feszültségforrásokat, és megvizsgáljuk, ezek mennyire felelnek meg a magyar kontextusnak. Elemezzük másrészt az

ELTE képzésében felmerülő strukturális, szervezésbeli dilemmákat is (például a Lesson Study struktúra kompatibilitása a gyakorlóiskolák féléves ütemtervével, a vezetőtanárok gyakorlatával és elvárásaival), és az erre a külföldi tapasztalatok alapján adható válaszokat. Mindezek figyelembevételével fejlesztjük és pontosítjuk a kurzus felépítését és szervezési módját.

A kurzus hallgatói tudásra és készségekre gyakorolt hatását 2026-tól kezdődően többféleképp is vizsgálni fogjuk. Kérdőíves vizsgálattal a kurzus előtt felmérjük a hallgatók elvárásait, a kurzus végén a hallgatók tapasztalatait és elégedettségét, majd két évvel később a végzős, hosszú tanítási gyakorlatukon is túllévő hallgatók véleményét a kurzus szerepéről szakmai fejlődésükben. Ezeket a kérdőíveket néhány kiválasztott hallgató esetében félig vezetett interjúkkal egészítjük ki.

Emellett egyes kurzusokról (a hallgatók beleegyezésével) hang és videofelvételeket készítünk, és kvalitatív módon elemezzük az óratervezéssel kapcsolatos beszélgetések jellegét és minőségét, illetve a hallgatók által megtartott tanórákat. Ezeknek az elemzéseknek a során, a tanári tudásra és készségekre vonatkozó nemzetközileg elterjedt elméleti modellekre támaszkodunk (Ball et al., 2008; Rowland, 2020; Pepin et al. 2017).

Irodalomjegyzék

- Anderson, L. W., & International Institute for Educational Planning. (1991). *Increasing teacher effectiveness* (p. 19). Paris: Unesco.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM* 45(6), pp. 797–810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Artigue, M., Doorman, M., Krainer, K., Maass, K., & Ruthven, K. (Eds.) (2013). Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching. *ZDM* 45(6)
- Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., & Maass, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), pp.63-89.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Barber, M. és Mourshed, M. (2007): „Mi áll a világ legsikeresebb iskolai rendszerei teljesítményének hátterében?” In: *McKinsey jelentés* URL: <http://mek.oszk.hu/09500/09575/09575.pdf> Utolsó letöltés 2025. április 5.
- Boero, P. (2016). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 99–107). DCU Institute of Education and ERME. <https://hal.science/hal-01873224>
- Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 417–436. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.012>
- Borko, H. & Potari, D. (Eds.) 2020. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups. *ICMI Study 25 Conference proceedings*.
- Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf & K. J. Sher (Eds.), *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological*. (pp. 57–71). American Psychological Association.
- Bruner, J. S., Olver, R. R., & Greenfield, P. M., et al. (1966). *Studies in cognitive growth*. Wiley.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189x032001009>
- Csikós, C. (2010). Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra*, 12, 52-60.
- Daunt, Z., Saluja, T., Urbanski, M., & Barbarics, M. (2022). A retrospective look at discovery learning using the Pósa Method in three Hungarian secondary mathematics classrooms. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 19(2), 183–202. <https://doi.org/10.5485/tmcs.2021.0527>
- Dienes, Z. (1973). *Építsük fel a matematikát*, Gondolat.
- Ding, M., Huang, R., Pressimone Beckowski, C. et al. (2024). A review of lesson study in mathematics education from 2015 to 2022: implementation and impact. *ZDM Mathematics Education* 56, 87–99. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01538-8>
- Dorier, J., & Maass, K. (2014). Inquiry Based Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300–304). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/9789400749788_176
- Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Fejes-Tóth, P., Vancsó, Ö. (2024): Teacher’s training in inferential statistics with a parallel application of classical and Bayesian approach. In: Drijvers, P., Csapodi, Cs., Palmer, H., Gosztanyi, K., Kónya, E. (Eds.) *Proceedings of the Thirteenth Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME 13)* Budapest Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, pp 912-913
- Fejes, J. B., Mezei, T., Vigh, T., Szenczi, B., & Rausch, A. (2022). A Tanári Felelősség Kérdőív és a Tanári Hatékonyság Kérdőív működése pedagógusok és pedagógusjelöltek körében. *Iskolakultúra*, 32(5), 3-26.
- Fejes-Tóth, P., Vancsó, Ö., Borovcnik, M. (submitted 2024): Advancing statistical inference: A comprehensive exploration of curriculum development, teacher seminars, and teacher perceptions in Hungarian secondary schools *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*
- Fitzgerald, M. S., & Palincsar, A. S. (2019). Teaching Practices That Support Student Sensemaking Across Grades and Disciplines: A Conceptual Review. *Review of Research in Education*, 43(1), 227–248.
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME International Conference, vol. 2*. (pp. 345–352). University of Stellenbosch.
- Gosztanyi, K. (2016). Mathematical Culture and Mathematics Education in Hungary in the XXst century. In B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures* (pp. 71-89). Basel : Springer Birkhauser.

- Gosztonyi, K. (2019). History of mathematics, mathematical histories, storytelling in Hungarian mathematics education. In J. Sjuts & É. Vásárhelyi (Eds.), *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können* (pp. 137–148). <https://doi.org/10.37626/ga9783959871143.0.07>
- Gosztonyi, K. (2020). Tamás Varga's reform movement and the Hungarian "Guided Discovery" approach. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3) http://tmes.math.unideb.hu/load_doc.php?p=358&t=doc
- Gosztonyi, K., Kosztolányi J., Pintér, K., Vancsó, Ö., & Varga, E. (2018). Varga's « complex mathematics education » reform: at the crossroad of the New Math and Hungarian traditions. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.) *ICMI Study 24: School Mathematics Curriculum Reforms : Challenges, Changes and Opportunities. Conference proceedings* (pp 133-140).
- Gosztonyi, K. & Varga, E. (2023). Teachers' practices and resources in the Hungarian "Guided Discovery" approach to teaching mathematics: presenting and representing "series of problems". *ZDM Mathematics Education* 55, 641–656. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01481-8>
- Gosztonyi, K., Héger, T., & Csapodi, C., (submitted). Discrete mathematics in Hungarian curricula and in teacher education: issues and perspectives for the second transition. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*.
- Győri, J. G., Juhász, P. (2017). An extra curricular gifted support programme in Hungary for exceptional students in mathematics. In K. S. Taber, M. Sumida, & L. McClure (Eds.), *Teaching gifted learners in STEM subjects: Developing talent in science, technology, engineering and mathematics* (pp 89-106). Abingdon, Oxon and New York, NY : Routledge.
- Halmos, M. & Varga, T. (1978): Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation Hungary. *Educational Studies in Mathematics* 9(2), 225-244.
- Hanushek, E. A., & Rivkin, S. G. (2006). *Chapter 18 Teacher Quality. Handbook of the Economics of Education*, 1051–1078. doi:10.1016/s1574-0692(06)02018-6
- Hanushek, E. A. (2022). A simple and complete solution to the learning loss problem. *Policy Brief. Stanford University, SIEPR*.
- Huang, R., Takahashi, A., & da Ponte, J. P. (Eds.) (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics. An International Perspective*. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4>
- Juhász P. (2019) Talent Nurturing in Hungary: The Pósa Weekend Camps. In: Notices of the American Mathematical Society. 66. 6., 2019. pp. 898-900
- Juhász, P., Szász, R., Szűcs, G., & Varga, E. (2024). Professional Support in Teaching Mathematics through Guided Discovery: The Role of Agency on Multiple Levels. *Education Sciences*, 14(7), 769. <https://doi.org/10.3390/educsci14070769>
- Kelle, U., & Buchholtz, N. (2015). The Combination of Qualitative and Quantitative Research Methods in Mathematics Education: A "Mixed Methods" Study on the Development of the Professional Knowledge of Teachers. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (pp. 321–361). Springer Netherlands.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 6179, Issue 619, pp. 707–762). Information Age Publishing.
- Kónya, E., & Kovács, Z. (2018). Let's explore the solution: Look for pattern! In B. Maj-Tatis & K. Tatsis (Eds.), *Mathematics In The Real World* (pp. 136–147). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Kónya, E., & Kovács, Z. (2022). Management of problem solving in classroom context. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 12(1), 81–101. <https://doi.org/https://doi.org/10.26529/cepsj.895>
- Kónya, E., & Kovács, Z. (2023). The role of procedural and conceptual understanding in problem solving. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Problem Solving and Problem Posing: Perspectives and Potentials in Research and Practice : Proceedings of the 22th ProMath conference from August 22-24, 2022 in Thessaloniki* (pp. 97–111). Aristotle University of Thessaloniki.
- Kovács, Z., & Wintsche, G. (2025). Factors influencing the usage of Interactive action technologies in mathematics education: Insights from Hungarian teachers' ICT usage Patterns. *Open Education Studies*, 7(1). <https://doi.org/10.1515/edu-2025-0060>
- Laursen, S. L., & Rasmussen, C. (2019). I on the prize: Inquiry approaches in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5, 129-146.
- Maass, K. (Ed.) (2013). Inquiry-based learning in maths and science classes. PRIMAS final publication. https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf
- Maass, K., Cobb, P., Krainer, K. et al. (2019) Different ways to implement innovative teaching approaches at scale. *Educ Stud Math* 102, 303–318. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09920-8>
- Mariotti, M. A., Kónya, E., & Kovács, Z. (2023). Conceptualising the regular pentagon in collaborative argumentation. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (Vol. TWG1, Issue 17). Alfréd Rényi Institute of Mathematics. <https://hal.science/hal-04410964>

- Martin, W. G. (2009). Focus in high school mathematics : reasoning and sense making. In *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.* The National Council of Teachers of Mathematics.
- Matney, G., Bostic, J. D., Fox, M., Hicks, T., May, T., & Stone, G. (2022). Fourth-grade students' sensemaking during multi-step problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 65.
- Prendergast, M., & O'Donoghue, J. (2014). Unravelling the myth of effective teaching in mathematics. *Irish Journal of Academic Practice*, 3(1), 8.
- Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM Mathematics Education* 49, 799–812.
- Pepin, B. (2018). Enhancing teacher learning with curriculum resources. In: Fan, L., Trouche, L., Qi, C., Rezat, S., Visnovska, J. (eds) *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues*, 359-374. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_17
- Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, (Combined Edition). In *New York, John Wiley & Son*.
- Rowland, T. (2020). Frameworks for Conceptualizing Mathematics Teacher Knowledge. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_63
- Sahbari, J., Daher, W., & Rasslan, S. (2014). Mathematical knowledge and the cognitive and metacognitive processes emerged in model-eliciting activities. *International Journal on New Trends in Education and Their Implication*, 5(2).
- Scheerens, J., & Blömeke, S. (2016). Integrating teacher education effectiveness research into educational effectiveness models. *Educational research review*, 18, 70-87.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 & 2), 9–34.
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Skemp, R. R. (1971). The psychology of learning mathematics. In *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition*. Penguin Books. <https://doi.org/10.4324/9780203396391>
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Szendrei, J. (2007). When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: research and theory, practice and politics. *ZDM*, 39:443–458.
- Thompson, P. W. (2020). Constructivism in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 127–134). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_31
- Urbanski, M., Daunt, Z., Saluja, T., Barbarics, M., & Juhász, P. (2022). Connections between discovery learning through the Pósa Method and the secondary school leaving examination in three Hungarian mathematics classrooms. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 20(1), 67–85.
- Vancsó, Ö., Fejes-Tóth P., Borovcnik, M. (2022): Conditional Probability, Bayes and classical statistics – Evaluation of the Planned Secondary-School reform in Hungary. *ICOTS 11 Rosario International Association for Statistical Education (IASE)*, Paper 11.T6G2. 6 p. (2022)
- Varga, T. (1987). Az egyszeregy körül, *Kritika* 1987/12
- Varga, T. (1988). Mathematics Education in Hungary Today. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 291-298.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52, pp. 83-94.
- Zétényi, Á. (1998). A hatékony tanár. *Iskolakultúra*, 8(10), 68-74.