Gallai, colourings and critical graphs – a 50 year anniversary

Talk by Bjarne Toft

(University of Southern Denmark)

at the Erdős Centennial Conference , Budapest, July 2013

We all have a favorite paper -
I have two (both exactly 50 years old):

KRITISCHE GRAPHEN I

von

T. GALLAI

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Unter einer *zulässigen Färbung* des Graphen G verstehen wir eine Zuordnung von „Farben" zu den Knotenpunkten (im folgenden kurz: Punkten) von G, wobei jeder Punkt eine Farbe bekommt, und je zwei durch eine Kante verbundenen Punkte stets verschiedene Farben erhalten. Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine zulässige Färbung des Graphen G durchgeführt werden kann, heißt die *chromatische Zahl* von G, die wir mit $\varkappa(G)$ bezeichnen. Für den leeren Graphen G sei $\varkappa(G) = 0$. Der Graph G heißt *kritisch*, wenn für jeden echten Teilgraphen G' von G $\varkappa(G') < \varkappa(G)$ gilt. G heißt *k-kritisch* ($k \geqq 1$), wenn G kritisch ist und $\varkappa(G) = k$ besteht. Der Begriff der kritischen Graphen wurde von G. A. DIRAC eingeführt, und er bewies auch eine Reihe interessanter Eigenschaften dieser Graphen (s. [2]—[8]). In der vorliegenden Arbeit zeigen wir einige weitere Eigenschaften der kritischen Graphen. Mehrere der Resultate sind Verschärfungen gewisser Ergebnisse von DIRAC und anderer Verfasser.

Man kann leicht zeigen (s. [2], [12]), daß in einem k-kritischen Graphen der Grad[1] eines jeden Punktes $\geqq k—1$ ist. Der Kürze halber werden wir die Punkte $(k—1)$-ten Grades eines k-kritischen Graphen die *Nebenpunkte*, alle übrigen Punkte die *Hauptpunkte* des Graphen nennen. Es existieren kritische Graphen, die nur Nebenpunkte besitzen. Die vollständigen Graphen[2] und die ungeraden Kreise[3] sind solche Graphen, und man kann zeigen (s. (3.1)), daß außer diesen keine weitere existeren. Für $k = 1, 2, 3$ existieren überhaupt keine anderen k-kritischen Graphen (s. [12]). Die aus lauter Nebenpunkten bestehenden Graphen sind also von sehr einfacher Natur. Nun stellte sich heraus, daß die Nebenpunkte in jedem kritischen Graphen einen Teilgraphen von sehr einfacher Struktur spannen[4], sowie daß dieser Teilgraph eben aus vollständigen Graphen und ungeraden Kreisen zusammengesetzt ist. Es gilt diesbezüglich der

[1] Der Grad eines Punktes ist die Anzahl der zu dem Punkt inzidenten Kanten.

[2] Ein vollständiger j-Graph ($j \geqq 0$) besitzt j Punkte, und je zwei dieser sind durch eine Kante des Graphen verbunden. (Wir betrachten also den leeren Graphen als vollständigen 0-Graphen, den einpunktigen Graphen als vollständigen 1-Graphen.)

[3] Ein Kreis heißt ungerade, wenn er eine ungerade Anzahl von Kanten besitzt.

[4] Ist A eine Menge von Punkten des Graphen G, so besteht der durch A gespannte Teilgraph von G aus den Punkten von A und aus sämtlichen solchen Kanten von G, die Punkte von A verbinden.

KRITISCHE GRAPHEN II

von

T. GALLAI

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung einer früheren, unter dem gleichen Titel (s. [7]) erschienener Arbeit. Wir werden diesen ersten Teil durch das Zeichen KG I anführen. Es werden die Bezeichnungen von KG I benützt und die Abschnitte laufend numeriert. (Die Verweiszahlen (m.n) mit $m < 6$ verweisen also stets auf KG I.) Wir haben in KG I bewiesen, daß diejenigen Teilgraphen der k-kritischen Graphen, die durch die Punkte $(k - 1)$-ten Grades gespannt sind, eine sehr einfache Struktur besitzen. In der vorliegenden Arbeit werden wir beweisen, daß die Struktur der kritischen (punktkritischen) Graphen mit »kleiner« Punktanzahl eine gewisse Einfachheit zeigt. Die k-kritischen Graphen mit kleinster Punktanzahl sind die vollständigen k-Graphen. G. A. DIRAC hat gezeigt, daß k-kritische Graphen mit $k + 1$ Punkten nicht existieren (s. [3] S. 463). Er hat ferner bewiesen, daß es (isomorphe Graphen als nicht verschieden betrachtend) genau einen k-kritischen ($k \geq 3$) Graphen mit $k + 2$ Punkten gibt, und daß dieser aus einem Fünfeck und aus einem von dem Fünfeck fremden vollständigen $(k - 3)$-Graphen in solcher Weise zustande kommt, daß man jeden Punkt des Fünfecks mit jedem Punkt des vollständigen Graphen verbindet (s. (2.1); [3] S. 463). Dieser, wie auch der vollständige k-Graph sind zerlegbar.[1] Die DIRAC'schen Graphen von (2.14) sind nichtzerlegbare k-kritische Graphen Diese haben $2k - 1$ Punkte. Nun hat sich gezeigt, daß $2k - 1$ die kleinste Punktanzahl mit dieser Eigenschaft ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz (E_2.1). *Ein k-kritischer ($k \geqq 2$) Graph mit weniger als $2k - 1$ Punkten ist stets zerlegbar.*

Dieser Satz bildet das Hauptergebnis unserer Arbeit (s (8.17)). Aus diesem, bzw. aus gewissen Verallgemeinerungen von diesem kann man weitere Sätze über kritische Graphen erhalten. Es ergibt sich z. B. der folgende Satz (s. (8.17)):

Satz (E_2.2). *Es sei $k \geqq 3$ und $n < \frac{5}{3}k$. Dann kann man in jedem n-punktigen k-kritischen Graphen $\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}k - n\right)\right\}$ Punkte[2] so auswählen, daß jeder*

[1] Wir haben in KG I einen Graphen zerlegbar genannt, wenn die Menge der Punkte des Graphen so in zwei nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann, daß je zwei zu den verschiedenen Teilmengen gehörige Punkte durch eine Kante des Graphen verbunden sind (s. (2.2)).

[2] $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ bezeichnet jene kleinste ganze Zahl, die $\geqq \frac{p}{q}$ ist.

Or rather: I have three favorites!

ON FACTORISATION OF GRAPHS

By
T. GALLAI (Budapest)
(*Presented by* P. TURÁN)

§ 1.

By a *graph* we mean in this paper a set of *vertices* (or *points*) and *edges*, where each edge joins two different vertices called the *endpoints* or *extremities* of the edge[1]. A graph is finite if the set of its points and edges is finite. By a *subgraph* is meant a graph which is a subset of the original graph. An edge will be called *adjoint* to a subgraph if one of its endpoints belongs to the subgraph and the other does not; the former endpoint is said to be the *internal* vertex, the latter one the *external* vertex of the adjoint edge. The number of edges adjoint to a subgraph will be called the *adjoint number* of the subgraph. The number of edges adjoint to a single point is termed the *degree* of the point. If every point has a finite degree, the graph is said to be of finite degree or locally finite. If the degree of all points of the graph is the same, then we say the graph is *regular* and its *degree* is the common degree of its points. A regular subgraph containing each point of the original graph is said to be a *factor* of the graph. In particular, if the graph has a factor of degree 1, then each point of the graph belongs to one and only one edge of the factor; the edges of a factor of degree 2 are „circles'' having no vertex in common and containing together every vertex of the original graph[2].

A regular graph having a factor has another factor too, called the *complementary factor*, consisting of the edges not belonging to the factor-graph and of all vertices. The original graph is called the *product* of these two factors. The sum of the degrees of these two factors is clearly the degree of the whole graph. A regular graph having no factors is said to be *primitive*.

The first results of considerable importance concerning the factorisation of graphs are due to PETERSEN. He has proved the following theorems on finite regular graphs[3]:

[1] These concepts will be used here only in the combinatorial sense.
[2] D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akad. Verl., Leipzig (1936), pp. 155—159.
[3] J. PETERSEN, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Math.*, 15 (1891), pp. 193-220.

- ***Gallai's beautiful theory of alternating paths.***
- ***The Gallai-Edmonds decomposition theorem.***
- ***AN INTRIGUING FOOTNOTE :***
- ***With the present methods I have succeeded in getting factorization theorems for general graphs besides σ=1 only for σ=2. I shall discuss these results on another occation***

Gallai’s papers are mostly in German

- Gallai’s work is not as well-known as it should be, due to the fact that most of the papers are available in German only.
- It might be an idea to make translations into English available, either in bookform or on the internet (but it is a demanding and non-trivial task to create such translations).
- The papers deserve to be studied in their original form – Gallai is an outstanding writer with a very careful style and a lot of interesting details.

Gallai in Smolenice 1963

Foreign participants:

A. ÁDÁM (Szeged), G. A. DIRAC (Hamburg), P. ERDÖS (Budapest), T. GALLAI (Budapest), F. HARARY (Ann Arbor), H. IZBICKI (Wien), L. D. KUDRJAVCEV (Moskva), J. W. MOON (London), J. MYCIELSKI (Wróclaw), C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS (Aberdeen), G. RINGEL (West-Berlin), H. SACHS (Halle/Saale), A. A. ZYKOV (Novosibirsk).

Czechoslovak participants:

J. BLAŽEK (Praha), J. BOSÁK (Bratislava), K. ČULÍK (Praha), V. DOLEŽAL (Praha), M. FIEDLER (Praha), E. JUCOVIČ (Prešov), R. KARPE (Brno), V. KNICHAL (Praha), M. KOLIBIAR (Bratislava), M. KOMAN (Praha), A. KOTZIG (Bratislava), B. MÍŠEK (Stochov – Honice), F. NEUMAN (Brno), V. POLÁK (Brno), J. PROKOP (Praha), J. ROHLÍČEK (Praha), A. ROSA (Bratislava), J. SEDLÁČEK (Praha), M. SEKANINA (Brno), Š. SCHWARZ (Bratislava), J. ŠEDIVÝ (Praha), J. TROJÁK (Praha), B. ZELINKA (Liberec), F. ZÍTEK (Praha).

CRITICAL GRAPHS

T. GALLAI

I.

Let $\kappa(G)$ denote the chromatic number of the graph G (without loops and multiple edges), and $\varrho(x)$ the degree of the vertex x of G. G is said to be *k-critical* (shortly *critical*) if $\kappa(G) = k$ and if $\kappa(G') < \kappa(G)$ is valid for each proper subgraph G' of G. If G be a k-critical graph, then $\varrho(x) \geqq k - 1$ holds for each vertex x of G (see [1]), and if $\varrho(x) = k - 1$ or $\varrho(x) > k - 1$ we call x a *secondary* or *primary vertex* of G, respectively. There exist critical graphs containing secondary vertices only. The complete graphs and odd circuits (circuits containing an odd number of edges) are such graphs and from the theorem of BROOKS it follows that no other graphs have the same property. We have found, that in every critical graph the subgraph spanned by the secondary vertices is of a very simple structure. There holds the following

Theorem 1. *Let G be a k-critical graph and G_s the subgraph of G spanned by its secondary vertices. Then the lobes of G_s are complete j-graphs $(0 \leqq j \leqq k)$ and odd circuits.*

(The lobes (see [8], [9]) of a graph G are the maximal connected subgraphs of G with respect to the property that every pair of edges is contained in a circuit of G. The isolated vertices are also lobes. A complete j-graph is a complete graph with j vertices $(j \geqq 0)$, the complete 0-graph is the void graph.)

Ignoring the complete k-graphs the property expressed in Theorem 1 together with a trivial additional condition is sufficient for the characterization of the subgraphs G^s in the case $k \geqq 4$. This is asserted in the following

Theorem 2. *Let $k \geqq 4$ and let G' be a graph whose lobes are complete j-graphs $(0 \leqq j \leqq k - 1)$ and odd circuits, and the degrees of whose vertices are $\leqq k - 1$. Then there exists a k-critical graph G such that the subgraph spanned by the secondary vertices of G is isomorphic to G'.*

In Theorem 2 there is also contained the statement that for $k \geqq 4$ there are k-critical graphs without secondary vertices. In the proof of this statement the most important step is the determination of a 4-critical graph without secondary vertices. (With the aid of such a graph it is easy to construct k-critical graphs without secondary

Smolenice June 1963

THEORY OF GRAPHS AND ITS APPLICATIONS

Proceedings of the Symposium
held in Smolenice
in June 1963

Publishing House
of the Czechoslovak
Academy of Sciences
PRAGUE

Academic Press
NEW YORK
and LONDON

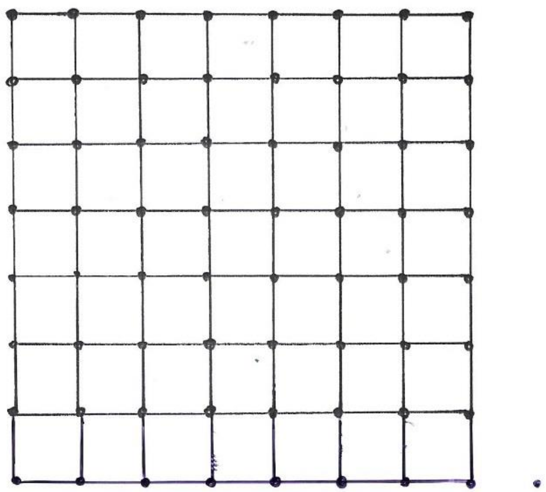
CONTENTS

Critical graphs I

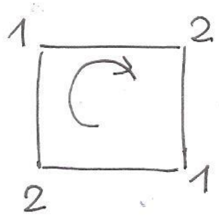
- The blocks in the minor subgraphs are complete and/or odd cycles (the minor graph is a forest of *Gallai trees*)
- This is best possible (by construction)
- If G is *k*-critical (*k*≥4) on n vertices (n>k) then
- $2e \ \geq \ (k-1)n \ + ((k-3)/(k^2-3))n$
- Gallai's Conjecture:
- $2e \ \geq [(k^2-k-2)n \ - k(k-3)]/(k-1))$ and this is sharp for n=1 mod (k-1)
- Krivelevich 1997, Kostochka&Stiebitz 2000 and 2002, Kostochka&Yancey 2012

4-critical graphs with empty minor graph

max G k-chromatic n vertices min G' odd cycle $G' \subseteq G$ $|V(G')|$



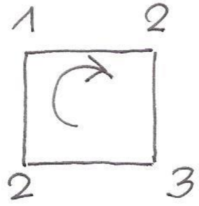
3-colouring :

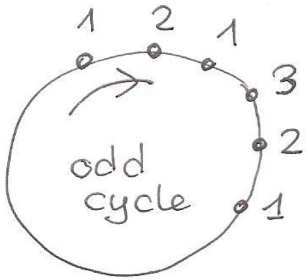


$12 \longrightarrow +1$

$21 \longrightarrow -1$

$\sum_c = 0$ always





$\sum \neq 0$

Critical graphs II

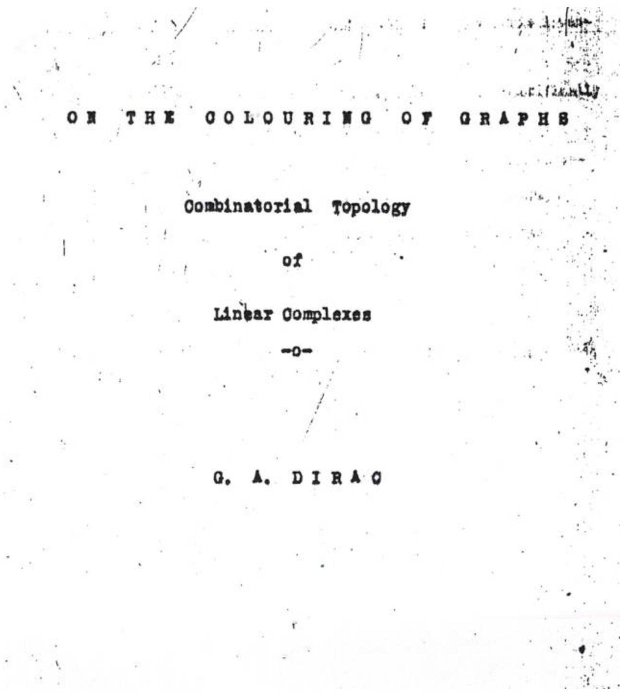
- A k-critical graph with ≤ 2k-2 vertices has disconnected complement
- The proof uses Gallai's theory of alternating paths from the 1950 paper
- Other proofs by Molloy 1999 and Stehlik 2003
- The right minimum number of edges for all n at most 2k-1

Balatonfüred and Budapest, Aug.-Dec. 1969. Ivan Tafteberg Jakobsen and I were in Hungary as part of a PhD-program

- **Erdős** was present in Budapest the whole fall
- **Rényi and Turán** came to the Institute regularly
- **Vera Sós** conducted a combinatorics course at the University in English
- **Hajós** was at the University
- **Gallai** spent one full day at the Institute each week, working in the Library and meeting people, maybe going out for lunch
- And many young people around!

- Ivan and I had a weekly meeting with Gallai for about one hour
- He showed us ideas and problems
- He was very kind, very open, but extremely modest about his own achievements

Gabriel Andrew Dirac



ON THE COLOURING OF GRAPHS

Combinatorial Topology

of

Linear Complexes

-o-

G. A. DIRAC

CRITICAL GRAPHS FIRST DEFINED IN G.A. DIRAC's PhD-thesis 1951

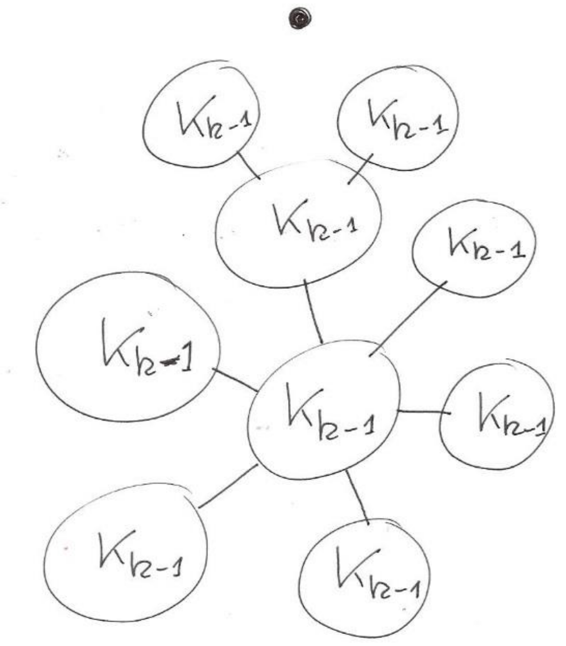
Gabriel Andrew Dirac (1925-1984)

G. A. Dirac

BUDAPEST CAFES

HUNGARIA (formerly New York) near intersection of Rakóczi út & Körút (út = street) Writers go there.
BELVÁROSI KAVÉHÁZ (= café) near Pest end of new Elisabeth bridge.
GERBEAUD in Vörösmarty Square at the end of Váci utca (= street) very good and pleasant cafe, but not for breakfast.
GELLERT hotel cafe.
There are also pleasant and historic cafes at the intersection of Andrássy út & Körút.

Critical k-chromatic graphs (on n vertices) with just one Major vertex



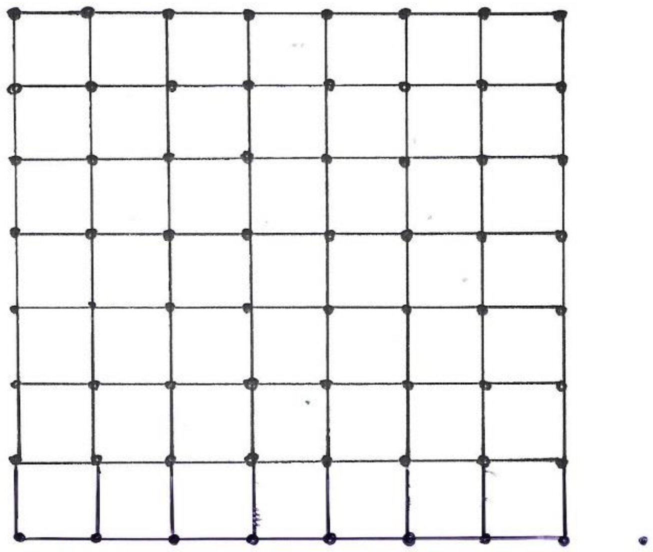
$$\min_{\substack{G \\ k\text{-crit.} \\ n \text{ vert.}}} \max_{C} |C| \le c \cdot \log n$$

- Min max $|C| \le c \log n$
- BEST POSSIBLE –
- Alon, Krivelevich, Seymour 2000
- Shapira&Thomas 2011
- Max min $|C|$ ~ $c \log n$
  Erdős 1959 and 1962
- Max min |odd C| ??

Critical 4-chromatic graphs with long shortest odd cycles

- Max min |odd C| ≥ c $\sqrt{n}$
- BEST POSSIBLE

$$\max_{\substack{G\ k\text{-chromatic} \\ n\ \text{vertices}}} \ \min_{\substack{G'\ \text{odd cycle} \\ G' \subseteq G}} |V(G')|$$



COMBINATORICA 4 (2—3) (1984) 183—185

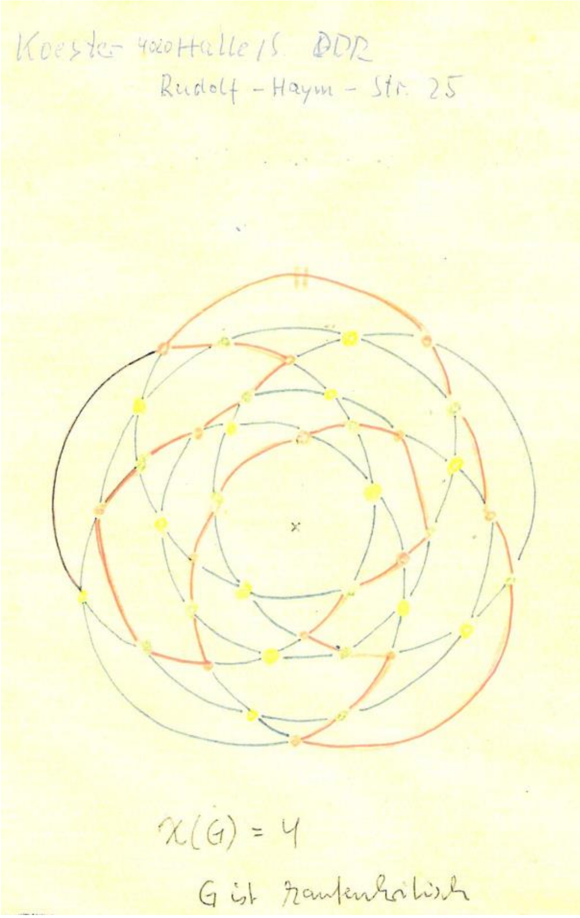
ON COLORING GRAPHS WITH LOCALLY SMALL CHROMATIC NUMBER

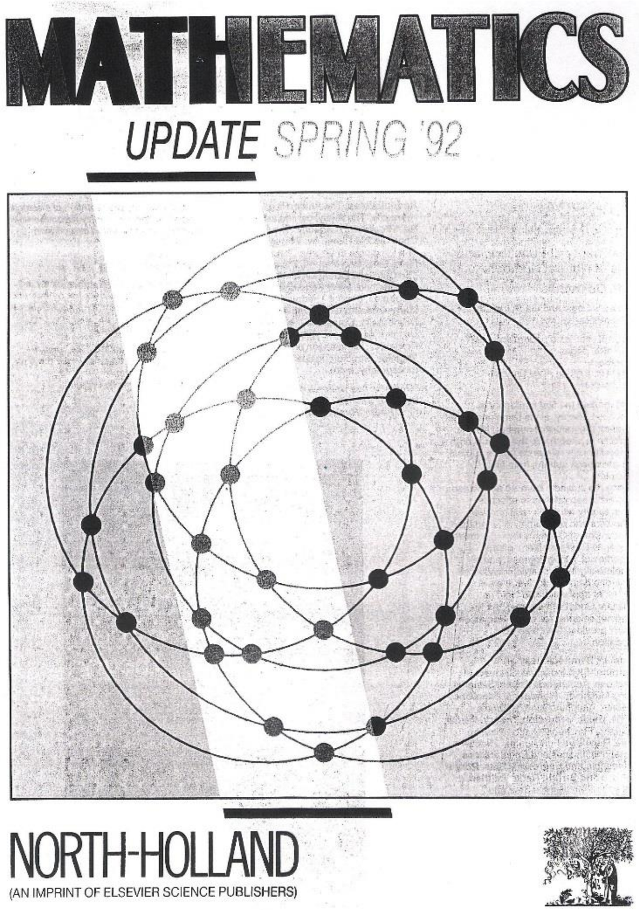
H. A. KIERSTEAD[1], E. SZEMERÉDI[1] and W. T. TROTTER, Jr.[1,2]

Received 19 September 1983

In 1973, P. Erdős conjectured that for each $k \geqq 2$, there exists a constant c_k so that if G is a graph on n vertices and G has no odd cycle with length less than $c_k n^{1/k}$, then the chromatic number of G is at most $k+1$. Constructions due to Lovász and Schriver show that c_k, if it exists, must be at least 1. In this paper we settle Erdős' conjecture in the affirmative. We actually prove a stronger result which provides an upper bound on the chromatic number of a graph in which we have a bound on the chromatic number of subgraphs with small diameter.

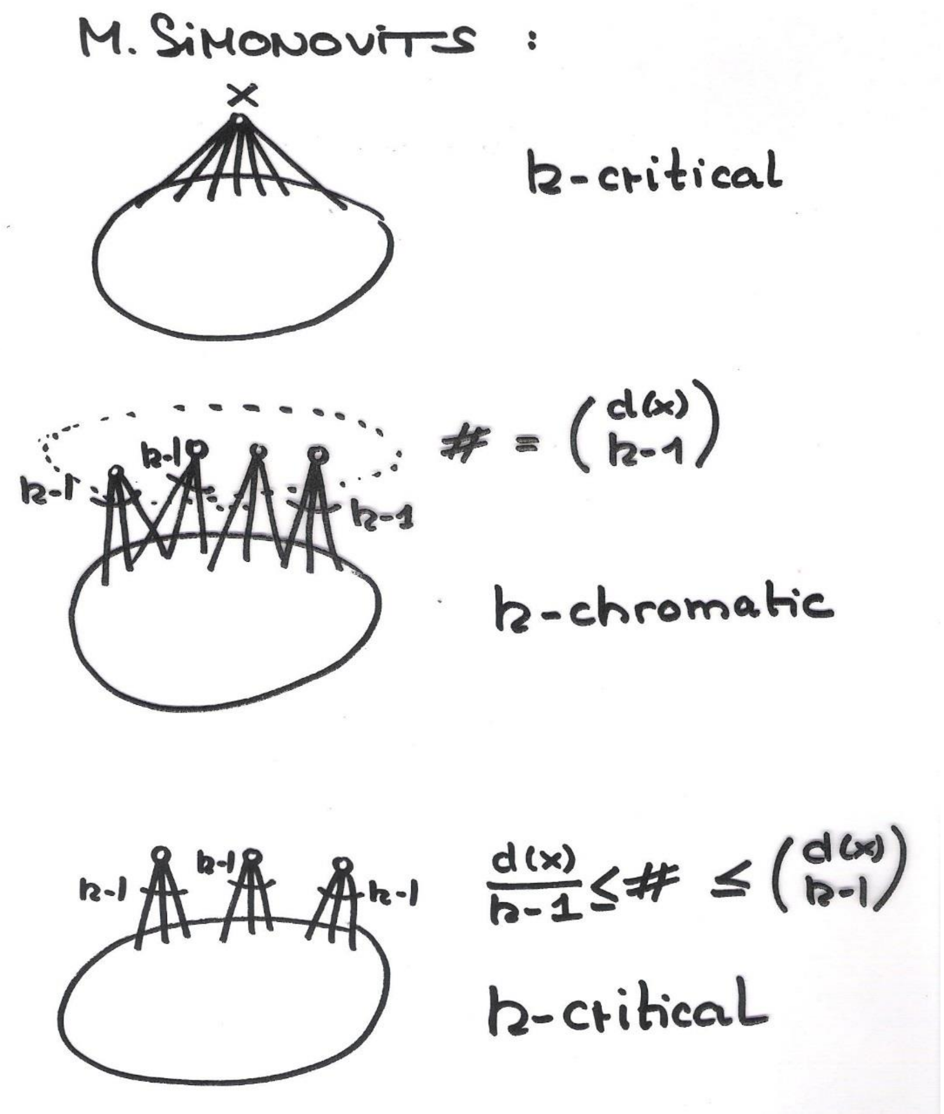
Planar 4-critical graphs without vertices of degree 3 (Koester 1984).



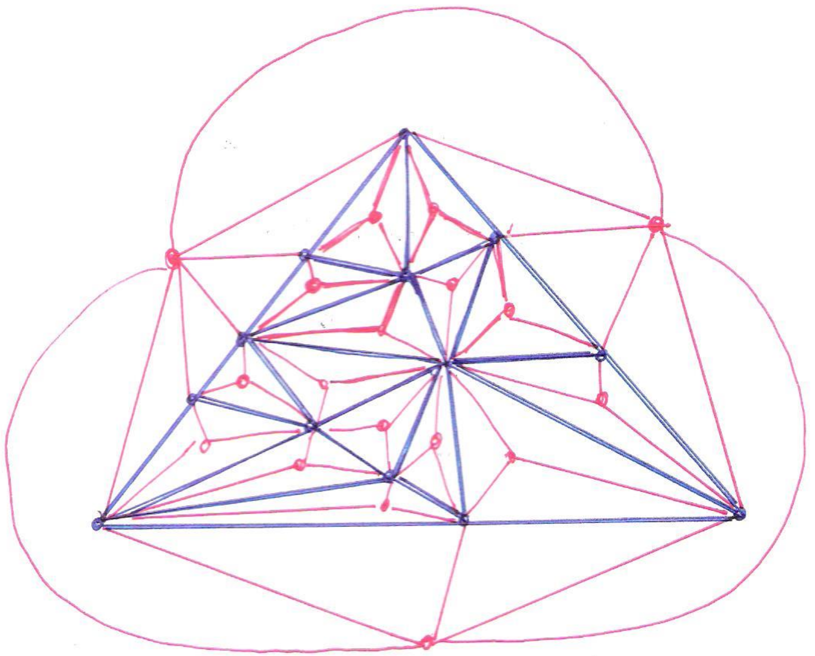


4-critical graphs with all vertices of high degree (max min δ(G))

- Simonovits and Toft 1971
- Max min d(G) $\geq$ c $\sqrt[3]{|V(G)|}$
- BEST POSSIBLE ??



Sperner's Simplex Lemma
(as told to us by Gallai)

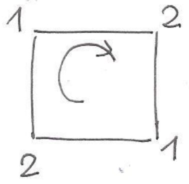


SPERNER' SIMPLEX LEMMA

$\Updownarrow$

THE RED GRAPH is 4-CHR.

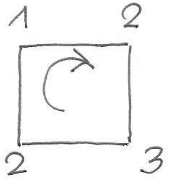
3-colouring :

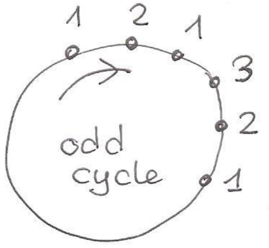


$12 \longrightarrow +1$

$21 \longrightarrow -1$

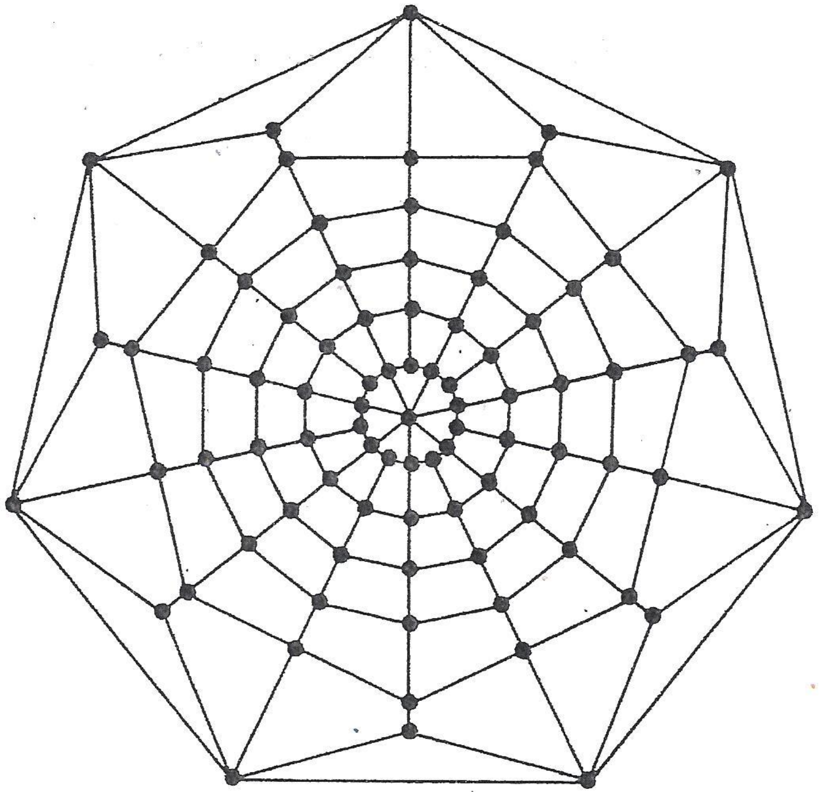
$\sum_c = 0$ always





$\Sigma \neq 0$

A generalization:
1972 Budapest
1974 Prague



On a Class of Planar 4-chromatic Graphs Due to T. Gallai

Frank Nielsen and Bjarne Toft

ABSTRACT. The investigation of this paper is based on ideas and results (unpublished) of T. Gallai, who generalized the 2-dimensional case of Sperner's Simplex lemma by proving that the members of a certain class of planar graphs are 4-chromatic. Moreover he characterized the (edge) critical members of the class. We consider a larger class of planar 4-chromatic graphs and characterize the critical members of this class. The paper is without proofs. An extended version of the paper containing all proofs can be obtained on request from the authors.

1. INTRODUCTION. SPERNER'S SIMPLEX LEMMA

The connection discussed in this § between the 2-dimensional case of Sperner's Simplex lemma and graph colouring was to our knowledge first pointed out by T.Gallai.

Let T denote a triangle with vertices t_1, t_2 and t_3 drawn in the plane, and let $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ be a decomposition of T into smaller triangles such that

(1) $T_1, T_2, \dots, T_m$ are triangles contained in T and each point of T is contained in at least one T_i.

(2) The intersection of any two different T_i and T_j is either empty or a common vertex or a common side connecting two common vertices.

(By (2) no vertex of T_i is on a side of T_j.) Furthermore we assume that all sides of the triangles $T, T_1, T_2, \dots, T_m$ are straight lines.

A maximum independent set of vertices in a bipartite graph

- has the same number of elements as a minimum set of edges covering all vertices (we assume that $\delta \geq 1$)
- Equivalently: the complement of a bipartite graph is perfect
- Due to König **and** Gallai 1932
- Published by Gallai in 1958 and 1959
- Gallai told me that he proved this in 1932 as an answer to a question posed in a lecture by König, but when Gallai told him, König said that he already knew. So Gallai did not count it as his own result.

(4. 3. 3) SATZ. *Bei jedem endlichen, ungerichteten paaren Graphen ist das Minimum der ψ-Werte der 1-füllenden Kantensysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der 1-aufnehmbaren Punktsysteme, vorausgesetzt, daß $\psi \geqq 0$ gilt.*

Daß überhaupt ein 1-füllendes Kantensystem existiert, folgt jetzt aus der Annahme (2) des Abschnittes 1. 1.

Derjenige Fall von (4. 3. 3), wo $\varphi = 1$ und $\psi = 1$ ist, stammt von D. KÖNIG (mündliche Mitteilung, 1932).

MAX MIN THEOREMS

MAXIMUM-MINIMUM SÄTZE ÜBER GRAPHEN

Von

T. GALLAI (Budapest)

(Vorgelegt von G. HAJÓS)

Einleitung

Im folgenden behandeln wir in vereinfachter Weise die Ergebnisse einer kürzlich in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit ([9], [10]). Wir beweisen mehrere, dem Mengerschen „*n*-Kettensatz" ([14], S. 222) ähnliche „Maximum-Minimum" Sätze. EGERVÁRY verallgemeinerte (in matrizentheoretischer Formulierung) den auf paare Graphen bezüglichen Spezialfall des Mengerschen Satzes in solcher Weise, daß er die Kanten der Graphen mit Zahlen bewertete und statt des Maximums der Kantenanzahlen gewisser Kantenmengen das Maximum der Wertsummen der betrachteten Kantenmengen nahm ([3], S. 17, 1). Den allgemeinen Mengerschen Satz kann man nicht in der gleichen Richtung ausdehnen. Es gelingt aber, einen der Egerváryschen Verallgemeinerung ähnlichen Satz dadurch zu finden, daß man statt ungerichteter Graphen gerichtete, statt Wege gerichtete Kreise nimmt. In gleicher Weise kann man aus dem „max-flow min-cut" Satz ([1], [5], [6], [7]), der den Mengerschen Satz als Spezialfall enthält, mehrere der Egerváryschen Verallgemeinerung entsprechende Sätze herleiten (Sätze (2. 1. 6), (3. 1. 4), (3. 2. 3), (3. 2. 6)). Wir werden jedem dieser Sätze je einen „dualen" Satz zur Seite stellen (Sätze (2. 1. 7), (3. 1. 5), (3. 2. 4), (3. 2. 7)). Durch Anwendung der erhaltenen Sätze auf besondere Graphen bzw. Bewertungen gelangen wir zu weiteren Maximum-Minimum Sätzen (Sätze (4. 2. 3), (4. 2. 5), (4. 2. 7), (4. 2. 9), (4. 3. 1), (4. 3. 3), (4. 3. 5), (4. 4. 12), (4. 4. 13)), die sich auf Wege bzw. auf Kanten beziehen, und die als Spezialfall den „max-flow min-cut" Satz, den erwähnten Egerváryschen Satz und einen von DILWORTH stammenden, auf halbgeordnete Mengen bezüglichen Satz ([2], S. 161, 1. 1) enthalten.

Es ist bemerkenswert, daß in den Sätzen die Ganzwertigkeit der Bewertung die Ganzwertigkeit der anderen auftretenden Zahlenwerte nach sich zieht. Wir werden unsere Sätze erst unter Berücksichtigung der Ganzwertigkeit ableiten und nur nachträglich zeigen, daß sie auch mit nicht ganzzahligen Bewertungen in Kraft bleiben (Abschnitt 2. 5).

Man kann unsere Sätze auch auf unendliche Graphen ausdehnen. Das zeigen wir in Bezug auf Satz (2. 1. 6) (Abschnitt 2. 6).

MR0131370 (24 #A1222) 05.40

Gallai, T.

Über extreme Punkt- und Kantenmengen. (German)

Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **2** 1959 133–138

Given a finite graph G without isolated vertices, a set P of vertices of G is called independent if no two elements of P are adjacent. Independence of a set of edges is defined similarly. P spans G if every edge of G is incident with some $p \in P$; similarly for sets of edges. Let $p_{\max}$ [$p_{\min}$] = maximum [minimum] number of independent [spanning] vertices of G, $k_{\max}$ and $k_{\min}$ the analogous numbers for edges. Then the following "duality theorem" is proved: $p_{\max} + k_{\min} = p_{\min} + k_{\max} =$ number of vertices of G. The result is extended to graphs over the non-negative integers.

Reviewed by *G. Sabidussi*

Gallai, T.

Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen. (German. Russian summary)

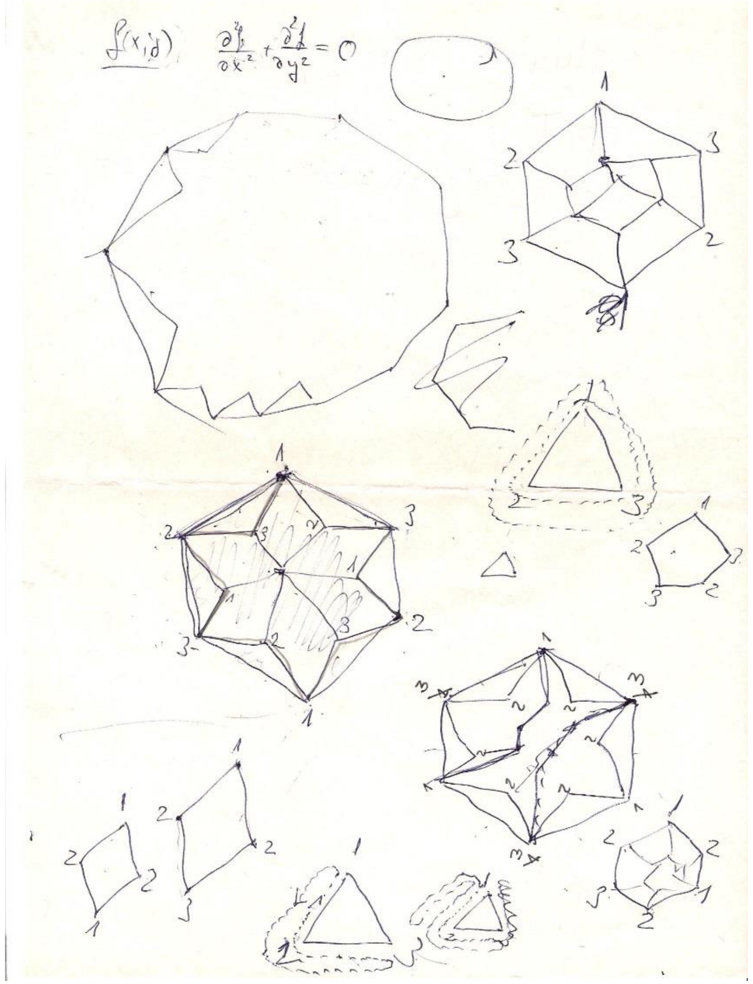
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** 1961 131–173

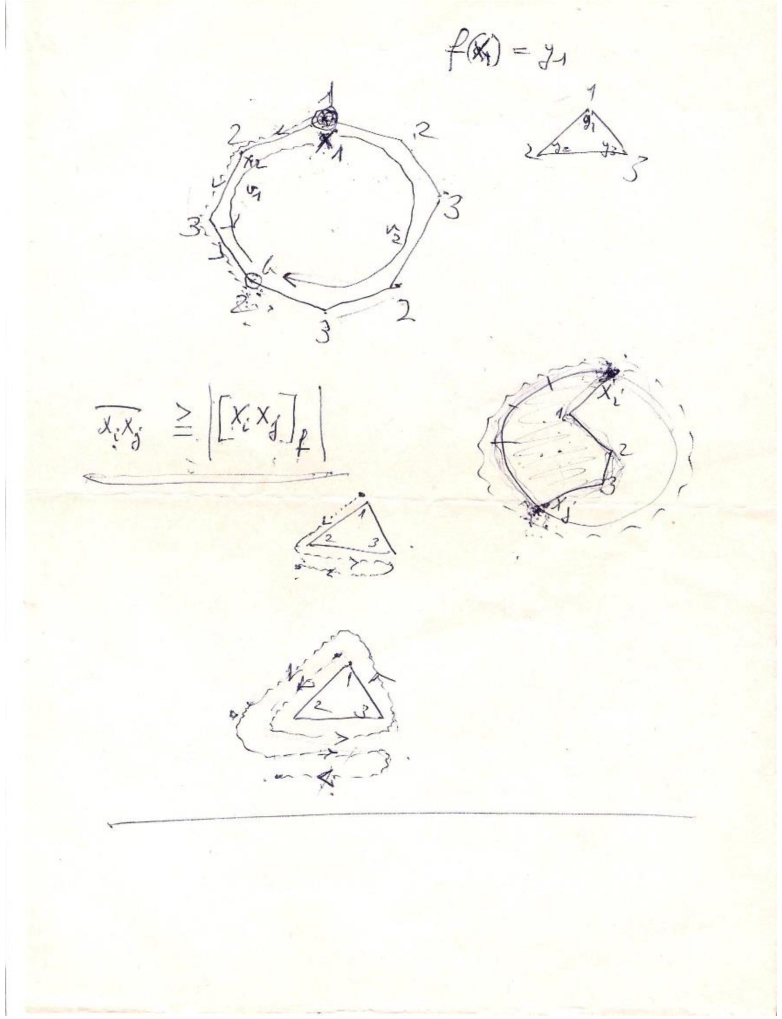
This paper makes an important advance in the theory of the factorization of graphs. To each vertex X of a finite graph Γ let there be assigned two non-zero integers $\kappa(X)$ and $\kappa'(X)$. Let Q denote a set of paths in Γ, each passing through no vertex more than once except for a possible return to the initial point. (A re-entrant path is considered to have two coincident ends.) Such a system Q is called admissible if no two members of Q have a common edge, the paths of Q have in all at most $\kappa(X)$ ends at X, and these paths pass through X, other than as an endpoint at most $\kappa'(X)$ times. The author obtains a formula for the maximum number of admissible paths for given functions κ and κ'.

He finds that his main result includes Menger's theorem and the factorization theorems given by Petersen, Baebler, Tutte, Belck and Ore.

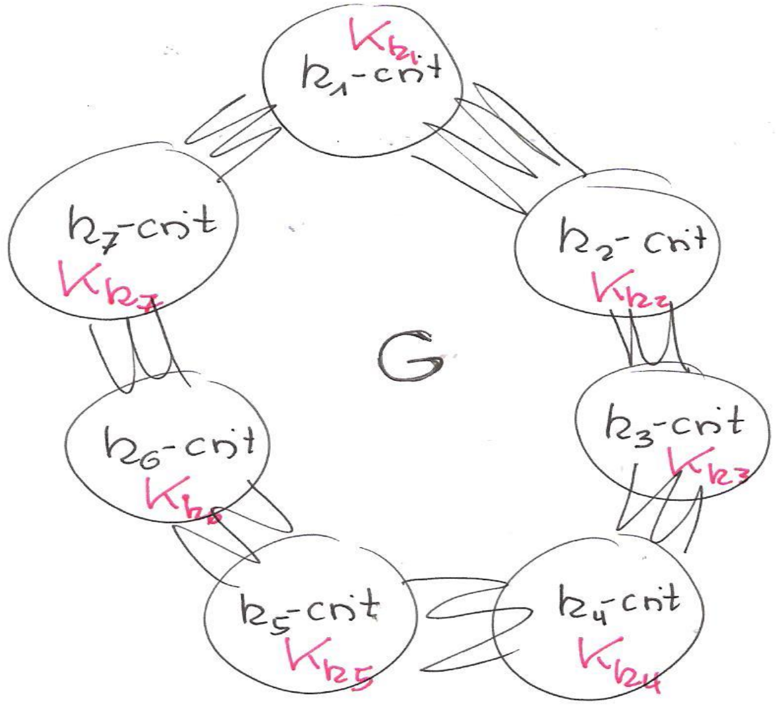
Reviewed by *W. T. Tutte*

Scribbles by Gallai, summer 1972





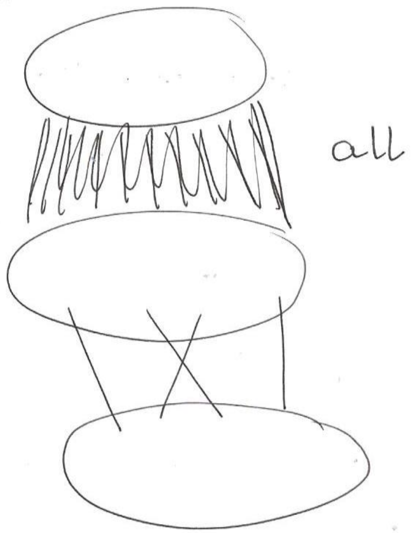
Other Gallai classes of graphs

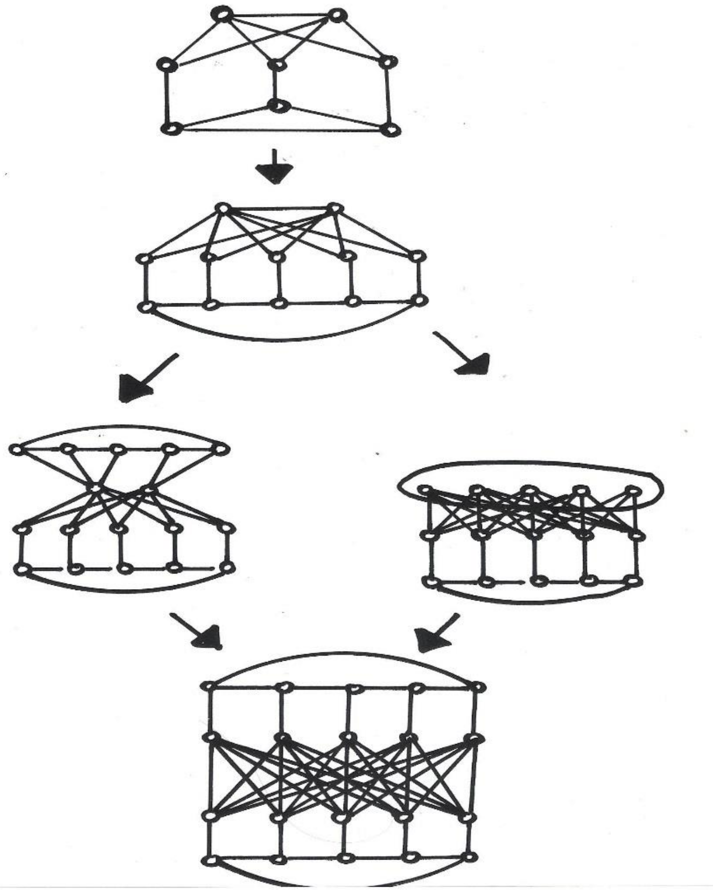


$$n = 3(k-1)+1$$

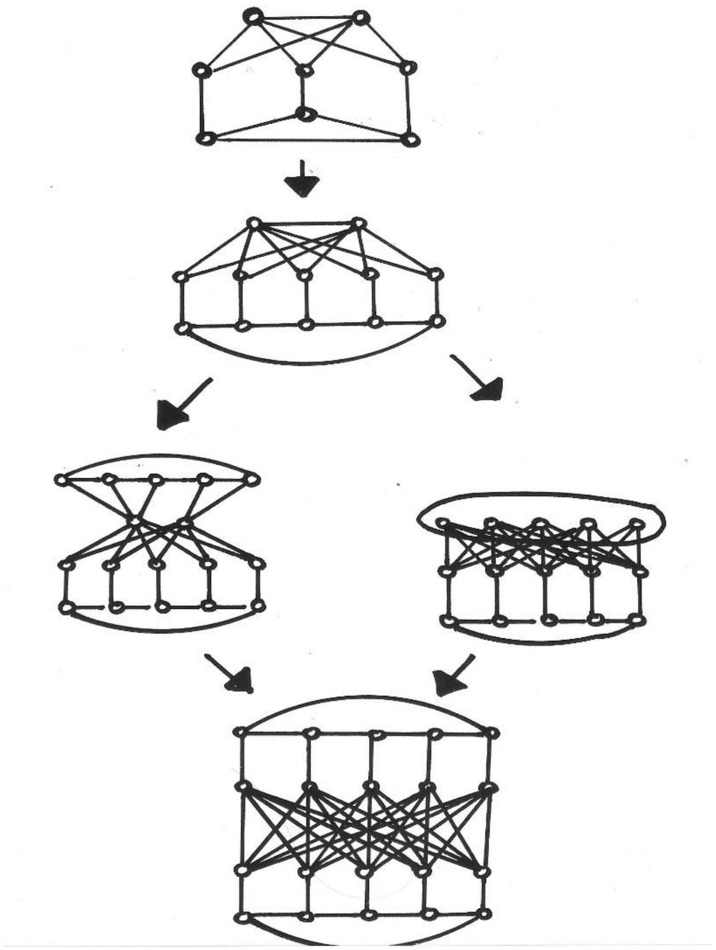
$$k_i + k_{i+1} \leq k-1$$

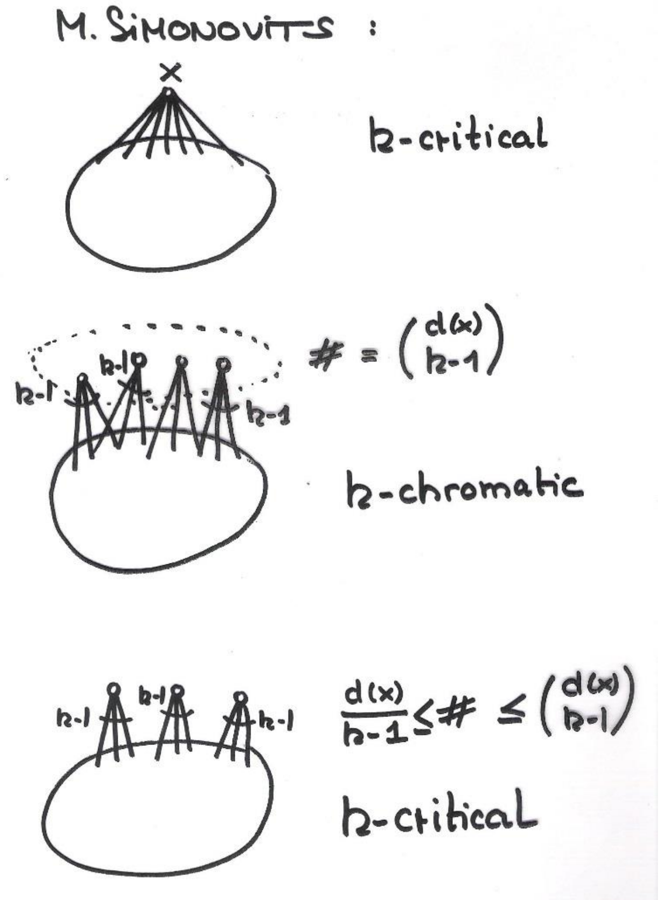
$$k_7 + k_1 \leq k-1$$





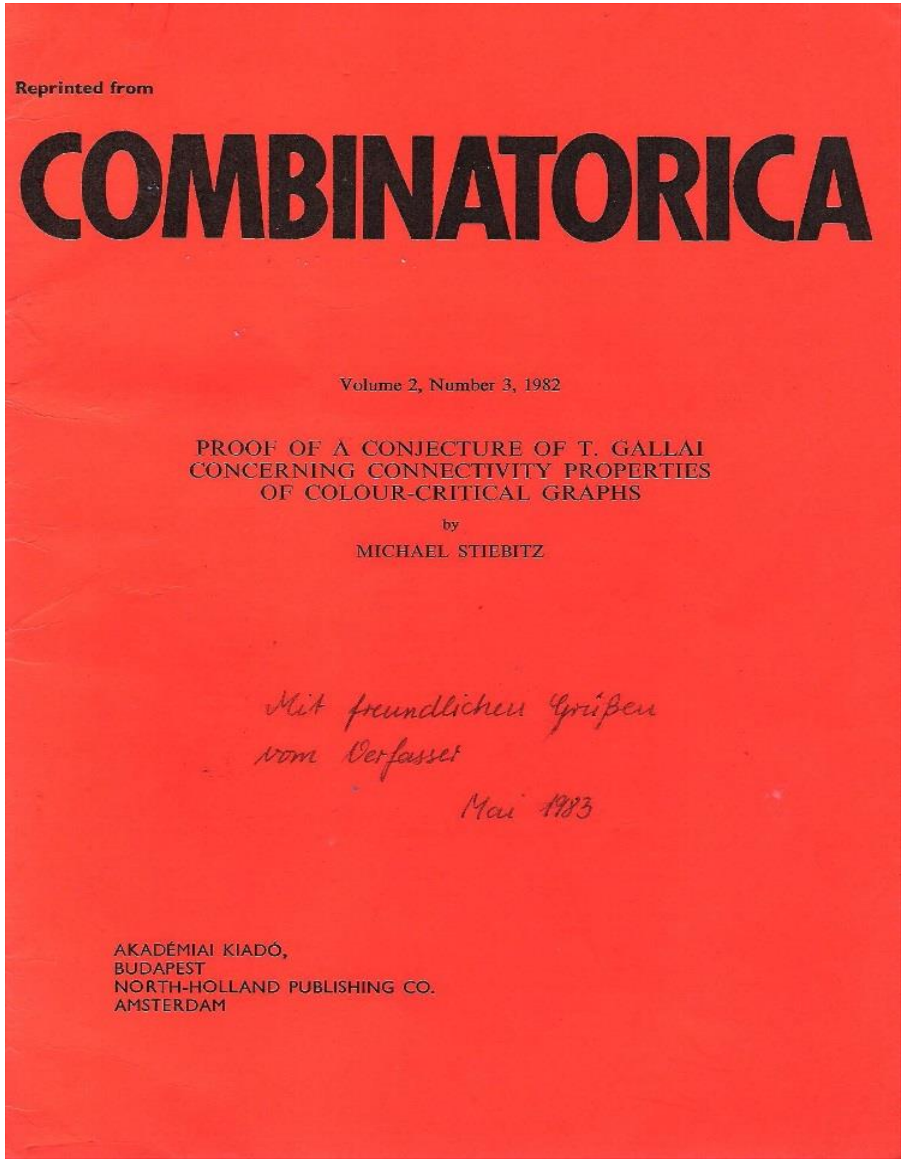
4-critical graphs with many edges/high min degree



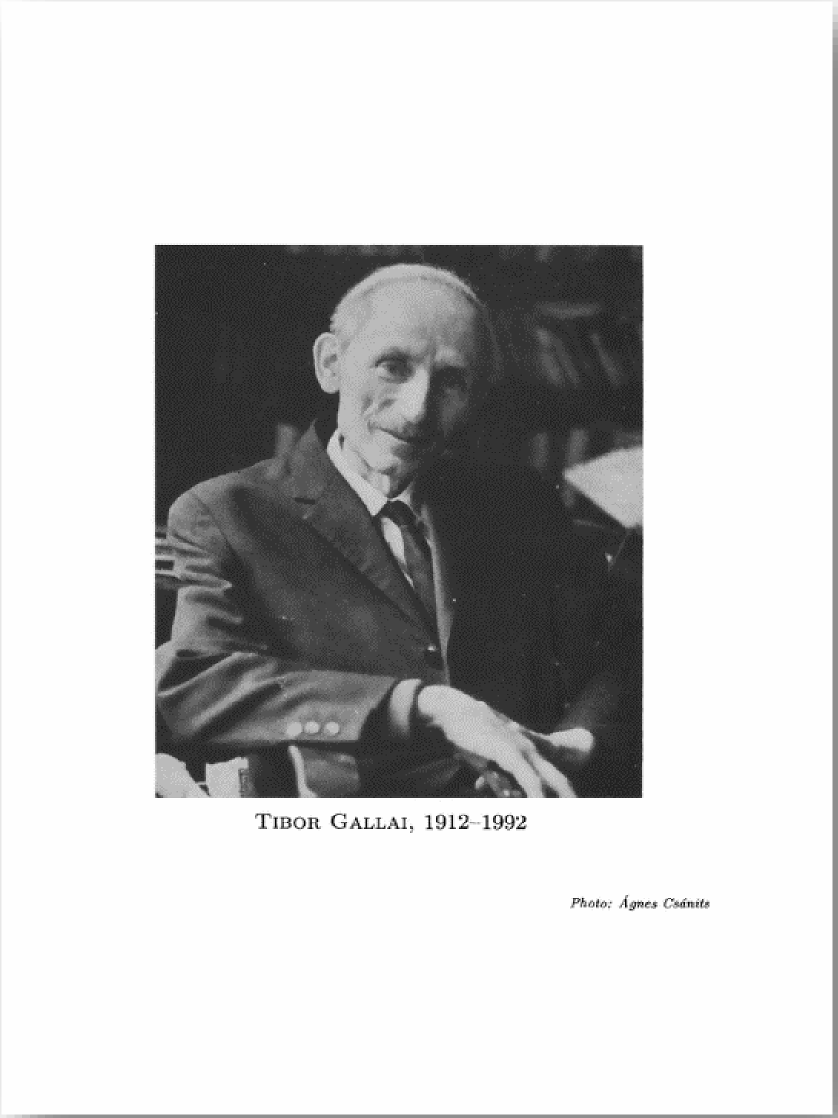


Critical k-chromatic graphs with precisely two Major vertices

- IF there are precisely two major vertices and they are independent
- THEN the minor graph is disconnected
- Gallai’s Conjecture: **the number of conn. components in the minor graph is at least the number of components in the major graph**
- PROVED by Stiebitz in 1982
- USED by Krivelevich in 1997

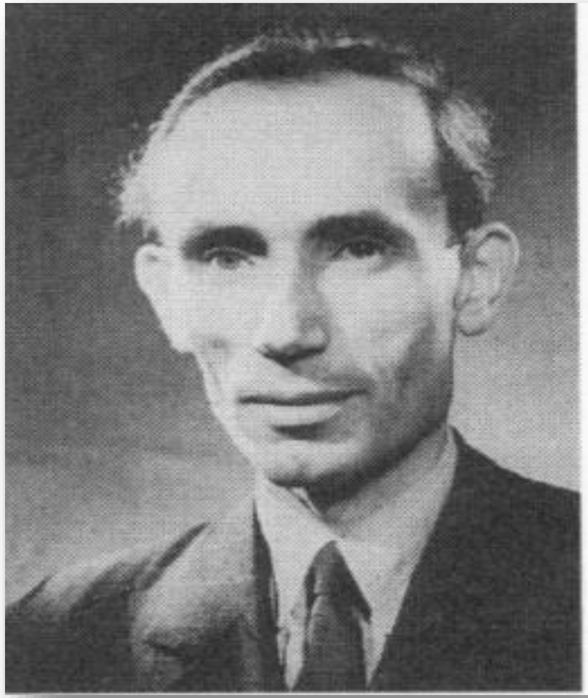


Tibor Gallai (1912 – 1992)



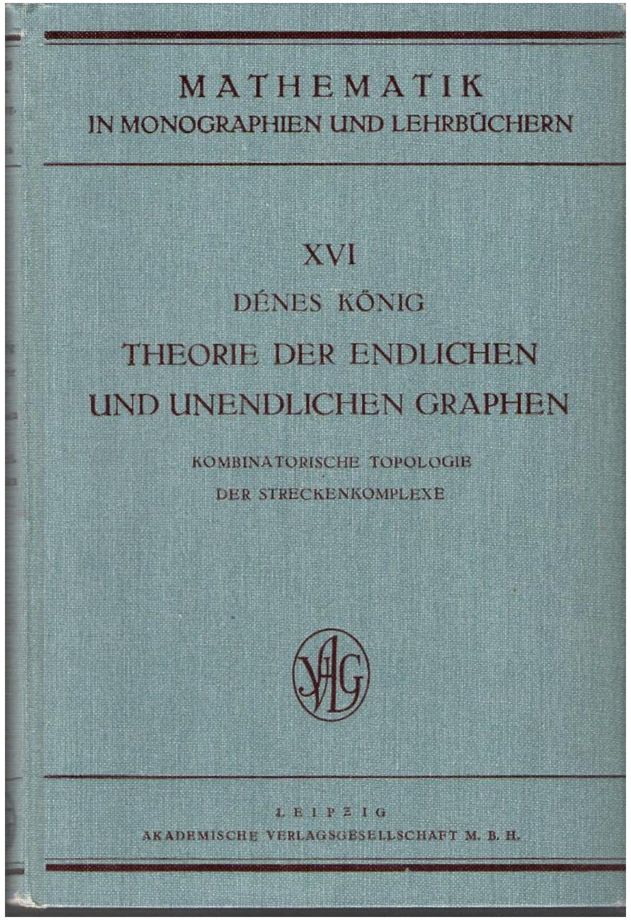
Tibor Gallai, 1912–1992

Photo: Ágnes Csánits



Dénes König 1884-1944

Perhaps graph theory owes more to the contact of mankind with mankind, than to the contact of mankind with nature.



GALLAI made the pictures for the book

Vielleicht noch mehr als der Berührung der Menschheit mit der Natur verdankt die Graphentheorie der Berührung der Menschen untereinander.

König in Göttingen 1904/05

Analysis situs

vorgetragen zu Göttingen während des
Winterhalbjahrs 1904/05

von

Prof. H. Minkowski

König Dénes

4

bige Punkte der Oberfläche so (auf ihr) verbunden werden, dass die Verbindungslinie die Randkurve nicht überschreitet. (1) mit is!

Wir können nun sagen, dass die Aufgabe der Analysis situs darin besteht: die Invarianten der homöomorphen Transformationen festzustellen.

Wir beginnen mit dem

I. Vierfarbenproblem.

§. 1. Das Flächenproblem.

Der Satz der erst 1903 von Paul Wernicke ~~st~~streng bewiesen wurde kann wie folgt ausgesprochen werden: Vier Farben genügen um zwei Nachbar-Länder einer Kugeloberfläche zu unterscheiden, wie auch die Oberfläche in Länder getheilt sei. Wir fangen mit diesem Problem an, weil es dazu geeignet ist die Begriffe und Methoden der Analysis situs kennen zu lernen, wenn es auch mit den eigentlichen Aufgaben der Analysis situs nicht eng verbunden ist.

19

Bei der erwähnten Färbung wird ein Nachbarland g' von g immer von g verschieden gefärbt sein, wir müssen nur den beliebigen Kantenzug durch g' führen, um das einzusehen.

§. 4 Der Fünffarbensatz.

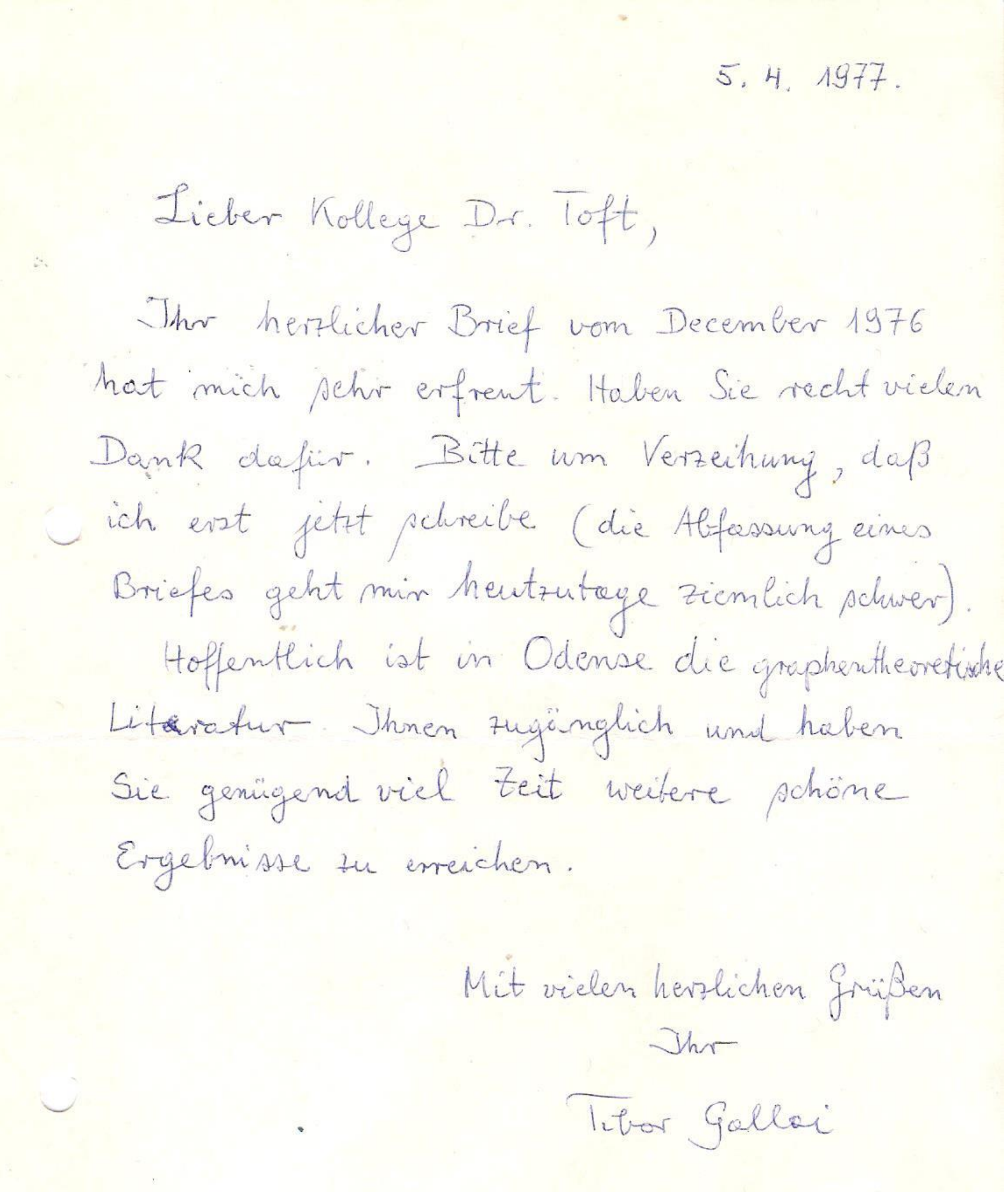
Hiermit haben wir also das ~~St~~ Grenzen- und Eckenproblem ganz identisch bewiesen. Das Vierfarbenproblem ist also auf das Ecken (zwei-Farben-) Problem zurückgeführt. Da aber die Lösung derselben bei Wernicke (s. unten) auch nicht richtig ist, können wir keinen ~~wollen wir einen anderen~~ Beweis des Vierfarbensatzes geben, mit dem sich DeMorgan, Guthrie, Kempe, Tait, Heawood und zuletzt Wernicke vergebens beschäftigt haben, so dass der Satz bis jetzt unbewiesen blieb.

Wir werden nur das beweisen, dass fünf Farben zur Färbung genügen. Dieser Beweis wird nicht so grosse Schwierigkeiten bieten. Als Hilfsmittel wird der Eulersche Polyeder-Satz dienen, der so ausgesprochen werden kann.

Sós, Erdös, Sved and Gallai (from *N is a number* by George Csicsery)

ANONYMUS IN THE CITY PARK (Városliget)

A letter 1977



5. 4. 1977.

Lieber Kollege Dr. Toft,

Ihr herzlicher Brief vom December 1976 hat mich sehr erfreut. Haben Sie recht vielen Dank dafür. Bitte um Verzeihung, daß ich erst jetzt schreibe (die Abfassung eines Briefes geht mir heutzutage ziemlich schwer).

Hoffentlich ist in Odense die graphentheoretische Literatur Ihnen zugänglich und haben Sie genügend viel Zeit weitere schöne Ergebnisse zu erreichen.

Mit vielen herzlichen Grüßen

Ihr

Tibor Gallai

Another letter 1977

To
Professor
Kalman,
Eidgenössische
Technische
Hochschule
Zürich

1977. április 14.

Kedves Kolléga Úr!

Erdős Pál professzor, aki jelenleg Budapesten tartózkodik, úgy informált, hogy Ön jól tud magyarul, ezért – a részemre legkényelmebb utat választva – magyarul írok. Először is elnézését kérem, hogy március 1-én kelt, szíves levelére csak így megkésve válaszolok. Sajnos a kérdezett irodalmat illetően csak nagyon kevés információval tudok szolgálni. Kedvezőtlen körülmények (betegségek) következtében az utóbbi években egyre kevesebbet tudtam matematikával (gráfelmélettel) foglalkozni, három éve pedig a gráfelméleti irodalmat sem tudom figyelemmel kísérni. Az 1964-ben írt cikkeimen kívül nem jelent meg más, kritikus gráfokról szóló munkám. Újabban e témakörrel Lovász László, Simonovits Miklós és Bjarne Toft foglalkoztak. Úgy értesültem, hogy Lovász és Simonovits a kritikus gráfokkal kapcsolatos munkáikat el fogják Önnek küldeni. Toftnak az alábbi, kritikus gráfokról szóló cikkeiről van tudomásom:

1. On the maximal number of edges of critical k-chromatic graphs, Studia Sci. Math. Hungar. 5 (1970), pp 461–470.
2. Some contributions to the theory of colour-critical graphs, Ph. D. thesis Univ. of London, 1970, (published as No. 14. in Various Publications Series, Matematisk Institut Aarhus Universitet)
3. Two theorems on critical 4-chromatic graphs, Studia Sci. Math. Hungar. 7 (1972) pp 83–89.
4. Color-Critical Graphs and Hypergraphs, J. Comb. Theory 16 (1974) pp. 145–161.
5. On critical subgraphs of colour-critical graphs, Discrete Math. 7 (1974) pp. 377–392.
6. Colour-critical graphs with complements of low connectivity (submitted to Math. Scand.)

Toft címe (1976 decemberi értesülés):

Matematisk Institut, Odense, Universitet, 5000 Odense, Denmark.

Szíves üdvözlettel
Gallai Tibor

1984 $\boxed{XI}$ 4

Université Claude Bernard - Lyon 1

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Dear Toft,
Many thanks for your interesting letter. I was in Germany and France and just returned and will be here for another 5-6 weeks. I have lunch with Gallai today and Stieltjes tomorrow and in a few days will visit Prague to see Nešetřil + Rödl. On Dec 4 there will be a small meeting in Bonn in honor of Lovász, I talk at 3:30 p.m. It would be nice if we could meet there. The poor old one is stupid, I walked to the Gallais and noticed only here that I left my pen at home and I had to borrow one from Gallai.

Let $G(n)$ be four critical and assume that every vertex has degree $\geq k$. How large can be the maximal degree of G? Let the degrees of the vertices be $v(x_1) \geq v(x_2) \geq \dots$. Can you determine $\max v(x_1) + v(x_2) + \dots + v(x_k)$. You will of course recognize that I came to these problems by looking at your nice paper. This does not guarantee of course that the problems are well posed.

Let $G(n;e)$ be a graph of n vertices and e edges. Assume that it is the subgraph of a critical four

Adresse : 43, boulevard du 11 Novembre 1918 - 69622 Villeurbanne Cedex - Tél. (7) 889-81-24

Dear Bjarne (1986 $\boxed{X}$ 8)

Many thanks for sending us your very interesting booklet. I am just having supper with Gallai. I had no time as yet to study it carefully.

I think the answer to your question on p. 2.3 is negative if $G(n)$ has no triangle then its chromatic number is $o(n^{1/2})$. The reason is that by a theorem of Ajtai, Komlós and Szemerédi a $G(n)$ which has no triangle always has an independent set of size $\sqrt{n}\log n$ (they strengthened the slightly weaker result of Graver and Yackel $\frac{\sqrt{n}\log n}{\log\log n}$ (JCT 1968). Now the greedy algorithm works at every step you take the largest independent set and color the whole graph by $\frac{\sqrt{n}}{\log n}$ colors.

Kind regards to you and your family + colleagues, au revoir
E. P.

Lieber Kollege Toft!

Haben Sie recht vielen Dank für die Übersendung Ihres interessanten Buches. Ich werde es noch sorgfältig studieren.

Mit vielen herzlichen Grüßen
Ihr
Tibor Gallai

~~Ilo~~ Best greetings Mici S.

Two Gallai conjectures

Dear Toft (1984 X 4)

Gallai made the following conjecture: Let $G(n)$ be a k-chromatic ~~or~~ edge critical graph of n vertices. Is it true that the number of K_{k-1} contained in our graph is $\leq n$ equality only if $n = k$ and $G(n)$ is a k-click. His second conjecture states that the number of $(k-1)$ chromatic critical subgraphs of our $G(n)$ is $\geq n$. These conjectures are open even for $k = 4$.

Gallai came to this conjecture from a conjecture of Rödl: Let $G(n)$ be ~~k-chr~~ k-chromatic critical and not a K_k then it contains a critical $(k-1)$ chromatic graph which is not K_{k-1}.

Hajnal and I stated in one of our papers the following conjecture. Let $G(n)$ be a graph of n vertices, assume that every subgraph of m vertices has an independent set of size $\geq \frac{m-k}{2}$. Then the

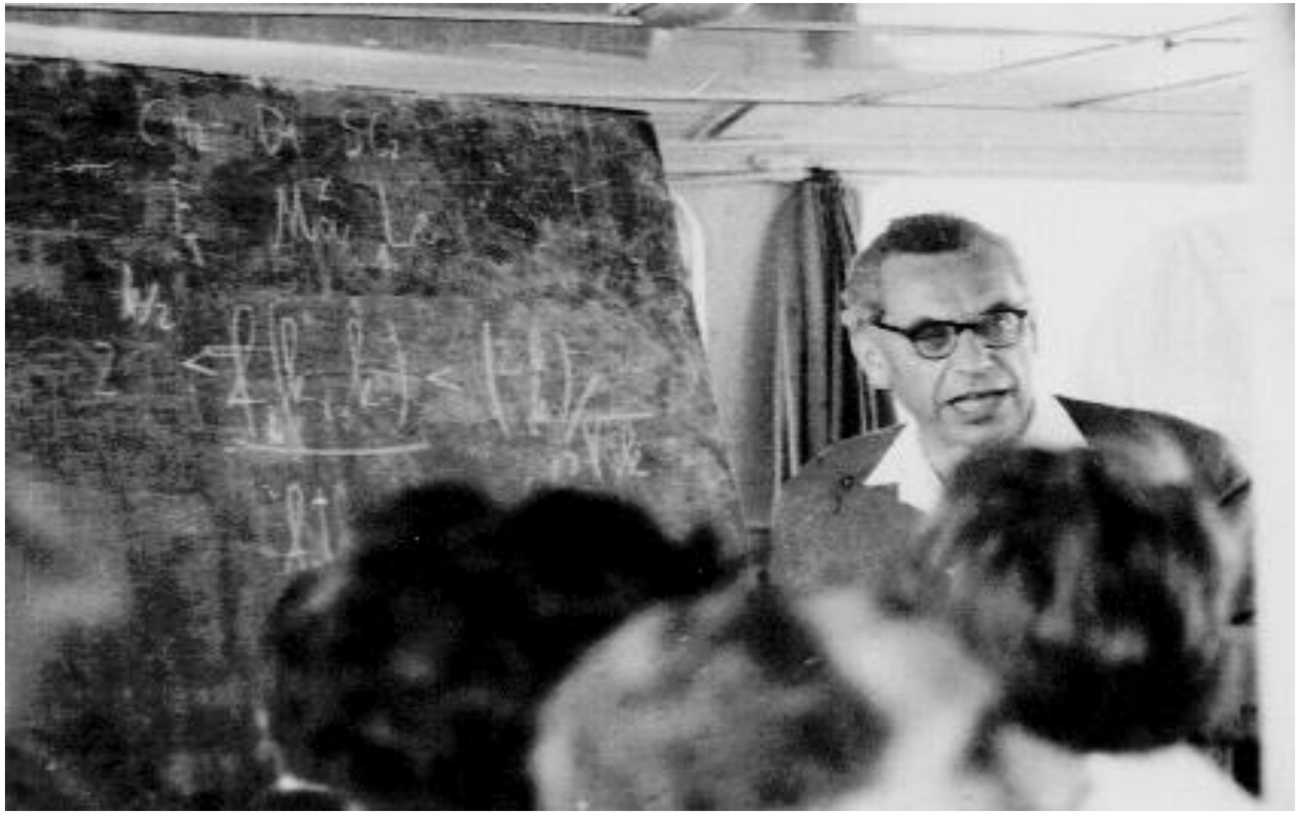
~~Mit~~ Vielen herzlichen Grüßen von
T. Gallai

Gallai made the following conjecture: Let $G(n)$ be a k-chromatic ~~or~~ edge critical graph of n vertices. Is it true that the number of K_{k-1} contained in our graph is $\leq n$ equality only if $n = k$ and $G(n)$ is a k-click. His second conjecture states that the number of $(k-1)$ chromatic critical subgraphs of our $G(n)$ is $\geq n$. These conjectures are open even for $k = 4$.

Thank you!

Paul Erdös

Paul Erdős p g v m l d a d l d
not quite c d yet



Erdős, Keszthely 1973, conducting a problemsession on the boat on Lake Balaton during the conference excursion