**Ergodelmélet és dinamikai rendszerek 2007 tavaszi félév**
**1. Zárthelyi**
**2007. március 27.**

1. Jelölje
$$T_\alpha^n := x + n\alpha \qquad\qquad (mod\ \ S^2)$$
az $M := S^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 2-dimenziós tórusz automorfizmusát, ahol $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

   (i) Mikor ergodikus ez a leképezés? Indokolás.

   (ii) Mikor nem ergodikus? Indokolás.

   (iii) Mikor keverő és mikor nem? Indokolás.

   (iv) Rögzítsük most $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Mi az
$$A_n f(x) = \frac{1}{n}(f(x) + f(Tx) + \dots f(T^{n-1}x)) \qquad x \in S^2$$
sorozat $L_2$-limesze, ha $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2$?

2. Legyen $M_1 = \{0, 1\}, M_2 = [0, 1)$ és $\mu_1(\{0\}) = \mu_1(\{1\}) = \frac{1}{2}, \mu_2 = Leb.$

   (i) Adjunk meg minkét téren olyan $T_1$ ill. $\mathrm{T}_2$ endomorfizmusokat, amelyek ergodikusak, de sem $T_1^2$, sem $T_2^2$ nem ergodikus.

   (ii) Megadhatók-e $T_1$ ill. $\mathrm{T}_2$ úgy, hogy izomorfak is legyenek?

3. Tekintsük az $1, 3, \dots, 3^n, \dots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjainak első jegyét. Előfordul-e ezek között a 3 ? A 9? Ha igen, melyik gyakoribb? Indokolás.

**Irányelv az értékeléshez:** Az 1. és 3. feladat hibátlan megoldása már jeles.