Megoldandók a $\times$-tel jelölt feladatok.

(1) $^\times$ Legyen $(M, \mathcal{B}, T)$ endomorfizmus, ahol $M$ topológikus tér, $\mathcal{B}$ a Borel $\sigma$-algebra, és $T$ folytonos. A $T$ endomorfizmust *topológikusan tranzitív*nak nevezzük, ha létezik sűrű orbit. $T$-t *minimális*nak nevezzük, ha nem létezik valódi, zárt, nem-üres, invariáns részhalmaza $M$-nek. *1. Igazoljuk, hogy a körvonal* $R_\alpha : S \to S$, $R_\alpha := x + \alpha \pmod 1$ *forgatása topologikusan tranzitív, sőt minimális, ha* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *2. Mutasson példát topológikusan tranzitív, de nem minimális leképezésre.*

(2) $^\times$ (V. Arnold) Tekintsük az $1, 2, \dots, 2^n, \dots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?

(3) $^\times$ Mutassuk meg, hogy ha valamely $n$-re $T^n$ ergodikus endomorfizmus, akkor $T$ is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

*Utalás:* $\mu(T^{-n}A \circ A) \le \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A \circ T^{-j}A)$, ugyanis $d(A, B) := \mu(A \circ B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

(4) $^\times$ (Neumann ergodtétele operátorokra) Legyen $U$ a $H$ szeparábilis Hilbert tér izometriája, és $P$ az ortogonális vetítés az invariáns vektorok $\mathcal{I} := \{f \in H \mid Uf = f\}$ alterére. Ekkor minden $f \in H$-ra teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i f = Pf.$$

(5) $^\times$ Mutassuk meg, hogy $2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ az 1,2,...,9 jegyek tetszőleges véges hosszú sorozatával kezdődhet (az első jegy persze nem 0).

(6) $^*$ (Simányi–Szász) Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, $G$ csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathcal{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathcal{F}, T_G) = \{(M, \mathcal{F}, T_g) : g \in G\}$ családot *csoport-hatásnak* nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$ -re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a $G$ csoport hat az $M$ téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az $x$ *G-pályájának* nevezük a $Gx := \{T_g x : g \in G\}$ halmazt.

Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az $\alpha$-ra ortogonális $g$ vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív $G$ csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a $G$ csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re

$$T_g x = g + x.$$

$\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy $G$-hatást.

*Bizonyítsuk be, hogy*

- *$G$-nek csak akkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az $\alpha$ koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);*
- *Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);*
- $^{**}$ *Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges $F$ halmaza az $\alpha$-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az $U$ halmazt.*

(7) $^{*\times}$ A csoport-hatás speciális esete a *csoport-eltolás.*

Legyen $M$ kompakt topológikus csoport és $\mu$ a Haar-mérték $M$-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen

$$T_g\ x = g \cdot x\ .$$

Ekkor $(\mathbf{M}, \mathcal{F}, \mathbf{T_g}, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (P1.12 Példa).

*Mi $T_g$ ergodicitásának feltétele, ha $G$ Abel-csoport?*

(8) $^{*\times}$ A $\mathbb{T}^d$ tórusz $T_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $T_\alpha = x + \alpha \pmod 1$ eltolása akkor és csakis akkor minimális, ha $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek.

(9) $^\times$ A $D : S \to S$, $Dx = 2x \pmod 1$ diadikus leképezés
a) topologikusan tranzitív?
b) minimális?

(10) $^\times$ Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ sík $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal adott lineáris leképezését. Mutassuk meg, hogy $A$ természetes módon származtatja a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tórusz $T_A$ automorfizmusát $\big($kissé pongyolán $T_A x = Ax \pmod{\mathbb{Z}^2}$ $\big)$. Keressük meg ennek az invariáns mértékét!

(11) $^\times$ Általánosítsuk az előző feladatban megjelenő szituációt magasabb dimenzióra is!

(12) Tekintsük az $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ halmazon a

$$(Tx)_i = \begin{cases} 1 - x_i & \text{ha } \forall\, j < i\text{-re } x_j = 1 \\ x_i & \text{különben} \end{cases}$$

összeadó gépet. (itt $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \in M$).
a) Keressünk invariáns mértéket!
b) Mi $T^{-1}$?

(13) $^\times$ $f : M \to M$ folytonos leképezése $M = \mathbb{T}^d$-nek. $f$ akkor és csakis akkor topologikusan tranzitív, ha $\forall U,\ V \subset M$ nyílt halmazra $\exists\, N = N(U,V)$ egész szám $(N \geq 1)$, hogy $U \cap f^N V \neq \emptyset$. (Az állítás igaz lokálisan kompakt, szeparábibilis metrikus terekre is.)

(14) $^\times$ Tekintsük az $I = [0,1]$ intervallum $Tx = 4x(1-x)$ endomorfizmusát. Mutassuk meg, hogy $I$-nek vannak pontjai, amelyek sem periódikus pontok, sem gyengén periódikus pontok.

(15) $^\times$ Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő leképezésnek a $\varrho(x) = C \cdot (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ függvény az invariáns sűrűsége. Mi $C$ értéke?

(16) $^\times$ Mutassuk meg, hogy a **14.** feladatban szereplő leképezés izomorf az

$$Tx = \begin{cases} 2x\,, & x < \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 - 2x\,, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sátor-tető leképezéssel?

(17) $^\times$ Legyenek $x_1 < x_2 < \cdots < x_8$ a $T^3$ leképezés fixpontjai, ahol $T$ a **14.** feladatban szereplő automorfizmus. Nyilván $x_1 = 0$.
a) Mely $i$-re lesz $x_i = \frac{3}{4}$?
b) Csoportosítsuk a maradék 6 pontot a $T$ leképezés két 3 periódusú pályájába!

(18) $^\times$ Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér.
a) Mutassuk meg, hogy $d\,(A,B) := \mu\,(A \circ B)$ pszeudo-metrika. $(A \circ B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$
b) Hogyan lehet $d\,(A,B)$-t metrikává tenni?
c) Mutassuk meg, hogy

$$\Big|\mu\,(X \cap Y) - \mu\,(U \cap V)\Big| \leq \mu\,(X \circ U) + \mu\,(Y \circ V)\ .$$

(19) $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a pék leképezése: $T : [0,1)^2 \to [0,1)^2$

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \dfrac{y}{2}\right), & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \left(2x-1, \dfrac{y+1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

ergodikus és keverő.

(20) $^{*\times}$ (Rényi Alfréd) $T$ akkor és csakis akkor keverő, ha $\forall\, A \in \mathfrak{F}$-re

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^{-n}A \cap A\right) \to \left[\mu(A)\right]^2 .$$

(21) $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy $[0,1)$ követekező leképezései ergodikusak és keverőek is:

a) $Tx = \left\{2x + \frac{1}{2}\right\}$

b) $Tx = \begin{cases} 2x\,, & x < \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x)\,, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

(22) Bizonyítsa be, hogy egy irredubicibilis Markov-eltolás ergodikus.

(23) Bizonyítsuk be, hogy minden aperiodikus irredubicibilis Markov-eltolás keverő.

(24) Milyen dinamikai rendszert definiál $[0,1]^2$-en az

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix?

(25) Bizonyítsuk be, hogy a

a) szorzat

b) ferde-szorzat

c) felemelés

leképezések endomorfizmusok.

(26) Mutassuk meg, hogy az indukált leképezés automorfizmus.

(27) Bizonyítsuk be, hogy a $T_1$ és $T_2$ keverő, akkor $T_1 \times T_2$ is az.

(28) Ha $T_1$ és $T_2$ ergodikus, akkor $T_1 \times T_2$ akkor és csak akkor ergodikus, ha

$$\Lambda_d(T_1) \cap \Lambda_d(T_2) = \{1\} .$$

$\big($ $\Lambda_d(T)$ jelöli a $T$ által indukált operátor sajátértékeinek halmazát. $\big)$

(29) $^{\times}$ Melyek a Gauss-leképezés fixpontjai?

(30) *Jelölések, definíciók*

Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus.

a. Tegyük fel, hogy $\mu(A) > 0$. Legyen $T_A : A \to A$ a következő: legyen $T_A x := T^k x$, ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb érték, amelyre $T^k x \in A$. $T_A$-t *Poincaré-leképezés*nek (vagy első visszatérés leképezésnek, vagy derivált leképezésnek) nevezzük.

b. $f : M \to \mathbb{N}$ mérhető függvény. Jelölje

$$M_f = \{(x,k) \mid x \in M, \quad 1 \le k \le f(x)\} \subset M \times \mathbb{N}.$$

Legyen $\mathcal{F}_f$ az $A \times \{k\}$, $A \subset \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$ halmazok által generált $\sigma$-algebra és legyen $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$. Legyen $T_f : M_f \to M_f$ a következő:

$$T_f(x,k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{ha} \quad k \le f(x) \\ (Tx, 1) & \text{ha} \quad k = f(x)\,. \end{cases}$$

Ekkor $(M_f, \mathcal{B}_f, \mu_f T_f)$ a *torony-endomorfizmus.* (Megjegyezzük, hogy $\mu_f$ csak akkor valószínűségi mérték, ha $\int_M f\,\mathrm{d}\mu = 1$, de a definíció általában is értelmes, ha $f \in L_1(\mu)$.)

A. *Mutassuk meg, hogy a Poincaré-leképzés és a torony-leképezés is mértéktartóak.*

B. *Ha $T$ ergodikus, $\mu(A) > 0$ és $f \in L_1(\mu)$, akkor $T_A$ és $T_f$ is ergodikusak.*

(31) *Jelölések, definíciók:*

Legyen $M$ topologikus tér, $\mu$ valószínűségi Borel-mérték

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap_{F \text{ zárt},\ \mu(F)=1} F \qquad \text{(a } \mu \text{ mérték tartója)}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{\bigcup_{j\geq n} T^j x} \qquad \text{(az } x \text{ fázispont } \omega\text{-limeszpontjai)}$$

$$R(T) = \{x \in M \mid x \in \omega(x)\} \qquad (T \text{ visszatérő pontjai})$$

*Legyen $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ endomorfizmus, ahol $M$ szeparábilis metrikus tér, $\mathcal{B}$ a Borel $\sigma$-algebra, $T$ folytonos. Igazoljuk:*

A. *$M$ $\mu$-majdnem mindenütt visszatérő, azaz supp $\mu \subset \overline{R(T)}$*

B. *Ha $M$ kompakt és $T$ ergodikus, akkor $\mu$-majdnem mindenütt pont pályája sűrű supp $\mu$-ben*

(32) $^\times$ Tekintsük a $[0, 1)$ intervallum $Tx = \{2(1 - x)\}$ leképezését.

a) Melyek $T$ periódikus pontjai?

b) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)]$$

értékét, ha $f(x) = \sin(2\pi x)$. Milyen értelemben vehetjük a limeszt?

(33) $^\times$ Ergodikus-e a $[0, 1]$

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x, & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} - 2x, & \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

leképezése?

(34) $^\times$ Keressük a $[0, 1]$ intervallum

$$Tx \begin{cases} 3x, & 0 < x < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right), & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

leképezésének invariáns mértékét.

(35) $^\times$ Mikor ergodikus a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$ 2-tórusz $T_\alpha(x, y) = (x + \alpha,\ y + x)$ leképezése?