9. MARKOV-LEKÉPEZÉSEK

Ebben a fejezetben egydimenziós leképezésekkel foglalkozunk.

D9.1. Definició.

Az $f\colon [0,1] \to [0,1]$ leképezést Markov leképezésnek nevezzük, ha létezik diszjunkt nyílt intervallumok véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere $\{I_j\colon I_j \subset [0,1]\}$, hogy

a) $m([0,1] \setminus \bigcup\limits_j I_j) = 0$, ahol m a Lebesgue-mérték;

b) $\forall j$-re $f|_{I_j} \in C^1(I_j)$ és

$$f(I_j) = (0,1);$$

c) megadható $\beta > 1$, hogy $|f'(x)| \geq \beta$;

d) megadható $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$, hogy

$$\left| \frac{f'(x)}{f'(y)} - 1 \right| \leq C|x-y|^\gamma,$$

hacsak alkalmas j-re $x, y \in I_j$.

Megjegyzések.

1. Mindenütt az alábbiakban f^n jelöli egy leképezés n-edik iteráltját; azaz $f^1 = f$, és $f^n = f \circ f^{n-1}$.

2. A b) tulajdonság az ún. Markov-tulajdonság erős formája, c) jelenti az f leképezés egyenletes hiperbolicitását, míg d) a módszereink számára alapvető disztorziós becslések egyik változata.

3. Példák intervallum-leképezésekre:

(i) Markov-leképezés az $f(x) = qx - [qx]$, ahol $q \geq 2$ egész szám; (ha $q > 1$ nem egész, akkor a leképezésre ugyan teljesül a), c) és d), azonban nem teljesül a b) Markov-tulajdonság).

(ii) az $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ Gauss-leképezés (l. P1.8). (N.B. Itt c) nem áll, viszont a), b) és d) teljesülnek. Valóban d) áll $\gamma < \frac{1}{2}$-el. Ugyanis $x, y \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ esetén

$$\begin{aligned}
|\frac{y^2}{x^2} - 1| &\le (y+x)\frac{1}{x^2}|y-x| \le \frac{2}{n}(n+1)^2|y-x|^{1-\gamma}|y-x|^\gamma \\
&\le \frac{2}{n}(n+1)^2\frac{1}{n^{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}}|y-x|^\gamma = \frac{2}{n^{2-\gamma}}2^{1+\gamma}(n+1)^{1+\gamma}|y-x|^\gamma \\
&\le 2^{2+\gamma}n^{2\gamma-1}|y-x|^\gamma \quad .)
\end{aligned}$$

Az elmélet fő eredménye Rényi Alfréd tételének (1957) következő általánosítása:

T9.2. Tétel. *Ha f a $[0,1]$ intervallum Markov-leképezése, akkor $[0,1]$-en létezik egyetlen olyan f-invariáns valószínűségi mérték μ, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(i) $\frac{d\mu}{dm}$ *Hölder-folytonos;*

(ii) $0 < \inf \frac{d\mu}{dm}(x) \le \sup \frac{d\mu}{dm}(x) < \infty$;

(ii) a μ mértékre nézve f ergodikus;

T9.2 bizonyítása.

A Krülov–Bogoljubov tétel alapgondolatát használva vezessük be az $m_n := f_*^n m$ jelölést, azaz $m_n(A) = m(f^{-n}A)$ minden A Borel–halmazra. A különbség annyi, hogy mivel most az invariáns mérték sűrűségfüggvényét kell megkonstruálnunk, ezért a mértékek gyenge kompaktsága helyett a sűrűségfüggvények kompaktságát biztosító Arzela–Ascoli tételt fogjuk használni.

b) és d) miatt f' Hölder-folytonos, azaz $\forall j$-re $\exists \alpha_j (= \sup_{x\in I_j} f'(x)) < \infty$, hogy $\forall x, y \in I_j$-re $|f'(x) - f'(y)| \le C\alpha_j|x-y|^\gamma$. Következésképp f mindegyik I_j intervallumot monoton és invertálható módon képezi le $(0,1)$-re.

Vezessük be felbontásoknak a következő finomodó sorozatát:

$$\eta_0 := \{(0,1)\}\ ,$$

$$\eta_1 := \{I_j\}\ ,$$

azaz $\forall I_j$ olyan maximális részintervallum, amelyet f 1-1 értelmű módon és simán képez $(0,1)$-re. Ennek általánosításaképp:

$$\eta_n := \{I_{j_1,\dots,j_n}\},\ \text{ahol } \forall I_{j_1,\dots,j_n} \text{ intervallumra az}$$

$$f^n : I_{j_1,\dots,j_n} \to (0,1) \text{ leképezés homeomorf.}$$

Ezt a definiciót ekvivalens módon így is bevezethetjük:

b)-ből következik, hogy $\forall j$-re létezik oly $f_j \colon I_j \to (0,1)$ homeomorf leképezés, hogy $\forall x \in \bigcup_j I_j$-re $f(x) = f_j(x)$ ha $x \in I_j$. Ekkor $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ pontosan azt jelenti, hogy

$$f^n(x) = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \dots \circ f_{j_1}(x) \; .$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$, akkor $1 \le l \le n$-re $f^l(x) \in I_{j_{l+1},\dots,j_n}$ (persze $I_\emptyset := (0,1)$). Vezessük be a következő jelölést: $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ -re

$$\eta_n(x) := I_{j_1,\dots,j_n} \; .$$

Könnyű látni, hogy $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$-re

$$J_n(x) := |(f^n)'\,(x)| = |f'_{j_n}(f^{n-1}(x)).f'_{j_{n-1}}(f^{n-2}(x))\dots f'_{j_1}(x)| \; . \tag{9.3}$$

Mostmár elkezdhetjük a tulajdonképpeni bizonyítást. Szűkítsük először a fázisteret a reguláris pontok teljes mértékű M_0 halmazára:

$$M_0 := \bigcap_{n \ge 0} \; \bigcup_{j_1,\dots,j_n} I_{j_1,\dots,j_n} \; .$$

Nyyilvánvalóan M_0 invariáns halmaz (itt erős értelemben, azaz $M_0 = f^{-1}M_0 = fM_0$), és $m(M_0) = 1$. Bizonyításunk a következő fő lépésekből áll:

1. Belátjuk, hogy $\forall x \in (0,1)$-re

$$\frac{dm_n}{dm}(x) := S_n(x) := \sum_{y \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(y)} \; . \tag{9.4}$$

Valójában ez (9.3) és az előtte mondottak egyszerű folyománya.

2. Igazoljuk a következő technikai alap-lemmát:

L9.5 Lemma. *Léteznek* $C_1, C_2 > 0$, *hogy* $\forall n > 1$, $\forall x \in M_0$ *és* $\forall y \in \eta_n(x)$ *esetén*

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le \exp\left[C_1 |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right]$$

továbbá

$$\left| \frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1 \right| \le C_2 |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma \; . \tag{9.6}$$

3. Lemmánk egyszerű következménye lesz az

L9.7 Lemma.

(i) $\exists K > 0,$ *hogy* $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x \in (0,1) -$ *re* $S_n(x) \leq K$*;*

(ii) $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x, y \in (0,1)$*-re*

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq S_n(x) C_2 |x-y|^\gamma \ .$$

4. Az eddigiek alapján mármost így okoskodhatunk:

Jelölje $H_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} S_\ell(x) \quad (x \in (0,1))$ az $A_n m$ mérték sűrűségfüggvényét. Az L9.7 lemmából következik: $\forall n \geq 1$-re és $\forall x, y \in (0,1)$-re

$$\sup_{n,x} H_n(x) \leq K \ , \tag{9.8}$$

$$|H_n(x) - H_n(y)| \leq H_n(x) \ C_2 \ |x-y|^\gamma \ . \tag{9.9}$$

E két tulajdonságból először is adódik, hogy $H_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ egyértelműen kiterjeszthető egy folytonos $\overline{H}_n : M = [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénnyé, amelyre továbbra is teljesülnek az (9.8-9) becslések. Mivel a $\{\overline{H}_n\}$ sorozat egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos az M kompaktumon, az Arzela–Ascoli tétel miatt alkalmas $\{\overline{H}_{n_j}\}$ részsorozata egyenletesen konvergál valamely $H: M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez, amelyre ugyancsak áll:

$$\sup_{x \in M} H(x) \leq K \ . \tag{9.10}$$

$$|H(x) - H(y)| \leq H(x) \ C_2 \ |x-y|^\gamma \ , \tag{9.11}$$

(9.10-11)-ből természetesen

$$|H(x) - H(y)| \leq K \ C_2 \ |x-y|^\gamma \ , \tag{9.12}$$

is látszik.

Tételünk állítása adódni fog a következő lemmából:

L9.13 Lemma. *A* $\mu(A) = \int_A H(x) m(dx)$ *mértékre igazak a T9.2 tétel állításai.*

Térjünk rá lemmáink bizonyítására.

L9.5 bizonyítása. (9.3) és D.9.1/d) alapján

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} = |\prod_{\ell=0}^{n-1} \frac{f'(f^\ell(y))}{f'(f^\ell(x))}| \leq \prod_{\ell=0}^{n-1} \left[1 + C|f^\ell(x) - f^\ell(y)|^\gamma\right] ,$$

$y \in \eta_n(x)$-ból egyúttal $f^\ell(y) \in \eta_{n-\ell}(x)$, így D.1/c) miatt

$$|f^\ell(x) - f^\ell(y)| \leq \lambda^{n-\ell}|f^n(x) - f^n(y)|$$

ahol $\lambda = \beta^{-1}$. A $\lambda_1 = \lambda^\gamma$ jelöléssel élve, és ismételten használva a $1 + x \leq e^x$ egyenlőtlenséget,

$$\begin{aligned} \frac{J_n(y)}{J_n(x)} &\leq \prod_{\ell=0}^{n-1} \left[1 + \lambda_1^{n-\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \leq \\ &\leq \prod_{\ell=1}^{n} \left[1 + \lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \leq \\ &\leq \prod_{\ell=0}^{\infty} \left[1 + \lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \leq \\ &\leq \exp \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_1^\ell |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma = \exp\left[|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma \frac{1}{1-\lambda_1}\right] . \end{aligned}$$

$C_1 = (1 - \lambda_1)^{-1}$ választással adódik az első egyenlőtlenség.

A második igazolásához válasszuk a $B, B' > 0$ konstansokat úgy, hogy $\forall\ 0 \leq z \leq C_1$-re $\exp z \leq 1 + Bz$ és $(1 + Bz)^{-1} \geq 1 - B'z$ teljesüljenek. Akkor

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \leq 1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma ,$$

valamint x és y felcserélésével

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \geq [1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma]^{-1} \geq 1 - B'C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma .$$

Összesítve a két becslést

$$\left|\frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1\right| \leq \max\{B, B'\}C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma .$$

□ L9.5 □

L9.7 bizonyítása. Egyszerű integrálhelyettesítéssel $\forall I_{j_1,\ldots,j_n}$-re és $\forall y \in I_{j_1,\ldots,j_n}$-re

$$1 = m((0,1)) = \int\limits_{I_{j_1,\ldots,j_n}} J_n(x)dx = J_n(y) \int\limits_{I_{j_1,\ldots,j_n}} \frac{J_n(x)}{J_n(y)} dx \leq$$
$$\leq J_n(y) \int\limits_{I_{j,\ldots,j_n}} \exp\left[C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] dx \leq J_n(y) \exp(C_1) m(I_{j_1,\ldots,j_n}) \ . \tag{9.14}$$

(9.4) alapján annak figyelembevételével, hogy minden egyes $I_{j_1,\ldots,j_n}$ intervallum $f^{-n}(x)$ pontosan egy elemét tartalmazza

$$S_n(x) \leq \exp C_1 \ .$$

Ezzel (i)-t beláttuk.

(ii) bizonyításához vegyük észre, hogy

$$S_n(x) - S_n(y) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} - \sum_{z' \in f^{-n}(y)} \frac{1}{J_n(z')}$$

kifejezésben minden egyes $I_{j_1,\ldots,j_n}$ intervallumba pontosan 1-1 z illetve z' érték esik, így (9.6) figyelembevételével

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} \left| 1 - \frac{J_n(z)}{J_n(z')} \right| \leq C_2 S_n(x) |x-y|^\gamma \ .$$

□L9.7 □

L9.13 Lemma bizonyítása.

(i) következik (9.12)-ből. (ii)-ben a sup-ra vonatkozó állítás éppen (9.10), míg ha $\inf H(x) = 0$, akkor (9.11)-ből $H(x) \equiv 0$ adódna, ami ellentmondás.

(iii), vagyis az ergodicitás igazolásához gondoljuk meg először, hogy ha $A \in \mathcal{I}$, akkor létezik olyan B, hogy egyrészt $\mu(A \circ B) = 0$, másrészt $T^{-1}B = B = TB$, azaz B erősen invariáns halmaz, másszóval teljes orbitokból áll. Tegyük fel tehát, hogy A nemtriviális erősen invariáns halmaz. μ és m ekvivalenciája miatt $0 < m(A) < 1$.

Válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Lebesgue sűrűségi tétele miatt $\exists I_{j_1,\ldots,j_n}$, hogy

$$m(A \cap I_{j_1,\ldots,j_n}) > (1-\varepsilon) m(I_{j_1,\ldots,j_n})$$

azaz

$$m(I_{j_1,\ldots,j_n} \setminus A) < \varepsilon m(I_{j_1,\ldots,j_n}.)$$

Lévén $f^n I_{j_1,\ldots,j_n} = [0,1]$, ezért, $1 = \int J_n(x)dx$. A középértéktételből adódik, hogy $\exists \xi \in I_{j_1,\ldots,j_n}$, amelyre $J_n(\xi) = (m(I_{j_1,\ldots,j_n})^{-1}$.

Igy

$$\max_{x\in I_{j_1,\ldots,j_n}} J_n(x) = J_n(\xi) \max_{x\in I_{j_1,\ldots,j_n}} \frac{J_n(x)}{J_n(\xi)} \le \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\ldots,j_n})}$$

Tehát

$$\begin{aligned} m([0,1]\setminus A) &= \int_{I_{j_1,\ldots,j_n}\setminus A} J_n(x)dx \le \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\ldots,j_n})} m(I_{j_1,\ldots,j_n)} \setminus A) \\ &\le \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\ldots,jx_n})} \varepsilon m(I_{j_1,\ldots,j_n}) = \varepsilon e^{C_1} \end{aligned}$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, ezért $m(A) = 1$, ellentmondás.

Befejezésül térjünk rá a tételben szereplő abszolút folytonos invariáns mérték unicitására. Tegyük fel indirekte, hogy az általunk konstruált μ mellett van még egy $\nu \neq \mu$, a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos invariáns mérték. Mivel μ sűrűsége pozitív, azért ν is abszolút folytonos μ-re. Jelölje $\rho = \frac{d\nu}{d\mu}$. Tetszőleges $h \in L_\infty(\mu)$-re igaz:

$$\int \rho h d\mu = \int h d\nu = \int h\circ T d\nu = \int \rho(h\circ T)d\mu = \int (\rho\circ T^{-1})hd\mu$$

ahol használtuk mind ν, mind μ invarianciáját. Innen $\rho\circ T^{-1} = \rho$ μ-m. m., azaz ρ invariáns függvény. μ ergodicitása miatt ezért $\rho \equiv$ const. Azonban lévén μ és ν valószínűségi mértékek, azért $\rho \equiv 1$, vagyis $\mu = \nu$. $\square$ L9.13, T9.2 $\square$

F Ü G G E L É K

Hölder-folytonos függvények. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek. Az $f\colon M \to M'$ leképezés Hölder-folytonos az $x \in M$ pontban, ha megadhatók $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$ konstansok és $x \in U \subset M$ környezet, hogy $\forall y,z \in U$-ra

$$d'(f(y),f(z)) \le Cd(y,z)^\gamma\ .$$

(A jólismert Lipschitz-tulajdonság épp az analóg követelmény $\gamma = 1$-gyel.)

Arzela–Ascoli tétel. Jelölje $C(M)$ az (M, d) kompakt metrikus téren értelmezett $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát. Az $F \subset C(M)$ részhalmaz akkor és csak akkor kompakt, ha

(i) F zárt;

(ii) $\forall x \in M$-re az $F[x] := \{f(x) : f \in F\}$ $(\subset \mathbb{R})$ halmaz korlátos;

(iii) az F-beli függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak (azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall f \in F$-re és $\forall x, y \in M$-re $d(x, y) < \delta$-ból $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ következik).

Felbontás. Legyen $(M, \mathcal{F}, \nu)$ valószínűségi mező. Pozitív mértékű halmazoknak egy megszámlálható $\mathcal{P} = \{A\}$ családját felbontásnak nevezzük, ha (i) $A \neq B \in \mathcal{P}$-ből következik $\nu(A \cap B) = 0$; (ii) $\nu(M \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A) = 0$.

Lebesgue sűrűségi tétele. Az $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaznak az $x \in \mathbb{R}$ pont sűrűségi pontja, ha tetszőleges $\{I_n\}$ $(x \in I_n)$ intervallumsorozatra $\lim_{n \to \infty} m(A \cap I_n)/m(I_n) = 1$. Állítás: Az A halmaz m-majdnem minden pontja A-nak sűrűségi pontja.