8. INVARIÁNS MÉRTÉK LÉTEZÉSE

8.1. Példa: A csaló pék leképezése: A Smale-patkó.

Tekintsük az $I^2 = [0,1]^2$ egységnégyzetet. Alkalmazzuk erre először az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

lineáris leképezést, majd a $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \otimes \left[0, \frac{2}{5}\right]$ téglalapot az

$$Fx = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

transzformációval vigyük át az egységnégyzet felső élét érintő $\frac{2}{5}$ szélességű sávba. A két leképezés $T = F \circ A$ szorzata $1-1$ értelmű leképezése az $M_1 = \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right) \otimes [0,1]$ halmaznak az $M_2 = [0,1] \otimes \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right)$ halmazba. Az $I^2 \backslash M_1$ téglalapon nem szükséges értelmeznünk T-t, de ha mégis akarjuk, akkor nyilvan símán is folytathatjuk T-t (pl. TI^2 lehet éppen patkó alakú is).

Kérdés: milyen invariáns mértékei vannak a T leképezésnek, és ezek közül melyek azok, amelyek valamilyen értelemben természetesek? Mi ezeknek a mértékeknek a tartója?

Ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos néhány alapvető eredménnyel foglalkozunk a következőkben. Az adott példa lezárásául még megjegyezzük, hogy a példa legegyszerűbb esete a Smale által az 1960-as években talált un. *patkó-leképezések*nek. Példánk esetén valóban létezik egy természetes invariáns mérték, amelynek a tartóját, másnéven *különös attraktorát* nevezzük *Smale-patkónak*.

Krülov-Bogoljubov tétele.

A legtöbb alkalmazásnál csak a dinamika adott, azaz egy endomorfizmus–félcsoport vagy egy automorfizmus–csoport, viszont a dinamika fázistere valamilyen síma struktúrával is rendelkezik. Igy pl. egy differenciálegyenlet-rendszer $\mathbb{R}^n$-en vagy valamilyen M^n síma sokaságon értelmezett; s ha egyáltalán van invariáns mérték, akkor még az is lehet akár síma akár nem. Másrészt rengeteg invariáns mérték is létezhet (ilyenek pl. a periódikus pályaívekre koncentrált mértékek). Invariáns mérték konstrukciójának természetes és klasszikus módszerét adja Krülov és Bogolyubov tétele.

8.2. Tétel. *(Krülov-Bogoljubov tétel) Legyen M kompakt, metrikus tér és $T\colon M \to M$ folytonos endomorfizmus. Ekkor T-nek van μ invariáns Borel mértéke ($\mu(M) = 1$).*

Bizonyítás: Rögzítsük M tetszőleges x pontját, és legyen $\varphi \in C(M)$. Jelöljük $A^n_\varphi = A^n_\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j x)$. Legyen továbbá $\Phi = \{\varphi_l \,:\, l \geq 1\}$ megszámlálható sűrű részhalmaza $C(M)$-nek. (N.B.: egy kompakt M tér csak akkor metrizálható, ha $C(M)$ szeparábilis; l. pl. Kelley: General Topology, 7. fejezet feladatai.)

Mivel minden φ_l-re az $A^n_{\varphi_l}$ számsorozat korlátos, azért tartalmaz konvergens részsorozatot. Lévén Φ megszámlálható, a Cantor-féle átlós eljárással kiválasztható egy olyan $n_j \to \infty$ részsorozat, hogy minden l-re

$$\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_{\varphi_l} = L(\varphi_l).$$

Állítjuk, hogy

- $\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_\varphi = L(\varphi)$ létezik minden $\varphi \in C(M)$-re
- és $L(\varphi)$ folytonos és pozitív, lineáris funkcionál $C(M)$-en.

Az első állítás igazolásához rögzített $\varphi \in C(M)$-hez és tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz válasszuk először l-et, hogy $\|\varphi - \varphi_l\| < \varepsilon$. Akkor

$$\left|A^{n_j}_\varphi - L(\varphi_l)\right| \leq A^{n_j}_{|\varphi-\varphi_l|} + \left|A^{n_j}_{\varphi_l} - L(\varphi_l)\right|$$

ami $< 2\varepsilon$, ha j elég nagy. Következésképpen $\left\{A^{n_j}_\varphi \,:\, j \geq 1\right\}$ Cauchy-sorozat minden $\varphi \in C(M)$-re, így konvergens is. A második állítás innen már egyszerűen következik.

Riesz reprezentációs tétele miatt létezik egy valószínűségi Borel mérték, hogy $L(\varphi) = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu$.

Mármost

$$\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_{\varphi\circ T} = L(\varphi\circ T) = \int (\varphi\circ T)\,\mathrm{d}\mu.$$

(N.B. Itt használjuk, hogy T folytonos!) Viszont

$$\lim_{j\to\infty}\left|A^{n_j}_{\varphi\circ T} - A^{n_j}_{\varphi}\right| \le \lim_{j\to\infty}\frac{2}{n_j}\left|\varphi(T^{n_j}x)-\varphi(x)\right| = 0$$

így

$$\int (\varphi\circ T)\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$$

tetszőleges $\varphi\in C(M)$-re. A tétel állítása következik az alábbi lemmából.

8.3. Lemma. *μ akkor és csak akkor invariáns a T endomorfizmusra, ha minden $\varphi\in C(M)$-re*

$$\int \varphi\ d\mu = \int (\varphi\circ T)d\mu\ . \tag{8.3}$$

Bizonyítás. Jelöljük általában $T_*\mu$-vel a következő mértéket: $\forall A\in\mathcal{F}$-re $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. Így μ akkor és csak akkor T-invariáns, ha $T_*\mu=\mu$. Egyszerű integrál-helyettesítéssel

$$\int \varphi\ d\mu = \int (\varphi\circ T)d(T_*\mu)\ . \tag{8.4}$$

Ha tehát μ T-invariáns, akkor (8.3) nyilvánvaló. Valóban: (8.3) nyilván fenáll mérhető halmazok indikátorfüggvényeire, és innen egyszerű approximációs gondolattal már adódik folytonos függvényekre is.

Tegyük fel most (8.3)-t, és legyen U nyílt halmaz, amelyre $\mu(\partial U)=0$. Válasszuk a χ_U indikátorfüggvényhez folytonos függvények olyan csökkenő φ_n sorozatát, hogy $\varphi_n(x)\searrow\chi_U(x)$ minden $x\notin\partial U$-ra. Valóban, legyen $h_\varepsilon(x) = 1-\varepsilon^{-1}\min\{\rho(x,U),\varepsilon\}$, és $\phi_n = h_{\varepsilon_n}$, ahol $\varepsilon_n\to 0$, ha $n\to\infty$. (8.4) áll minden φ_n függvényre, így Beppo-Levi tétele miatt χ_U-ra is. Következésképpen minden U nyílt halmazra, amelyre $\mu(\partial U)=0$, $\mu(U)=\mu(T^{-1}U)$.

Tekintsünk befejezésül egy tetszőleges U nyílt halmazt, valamint annak $F = M\setminus U$ komplemeterét. A lemma bizonyításához elegendő belátnunk, hogy $\mu(F) = \mu(T^{-1}F)$. Tekintsük $\delta>0$-ra az $G^\delta = \{x\in M|\rho(x,F)<\delta\}$ un. paralleltartományokat. Ezek nyíltak, és természtesen megszámlálható sok δ kivételével

$\mu(\partial G^{\delta}) = 0$. Legyenek δ_n-ek ilyenek, és amellett tegyük fel, hogy $\delta_n \searrow 0$. Választásunk miatt $\mu(G^{\delta_n}) = \mu(T^{-1}G^{\delta_n})$. Innen $n \to \infty$ esetén $\bigcap T^{-1}G^{\delta_n} = T^{-1} \cap G^{\delta_n}$ és a mértékek folytonossági tulajdonsága miatt már adódik a lemma. $\square$

Függelék

Beppo-Levi tétele. Legyen (X, μ) mértéktér. Ha az f_n-ek integrálható függ vények és $\sup\limits_n \int f_n \, d\mu < \infty$, továbbá $f_n \nearrow f$, akkor f is integrálható és $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

Riesz reprezentációs tétele. Legyen M kompakt metrikus tér. Ha $L: C(M) \to \mathbb{R}$ folytonos és pozitív (azaz $\forall \varphi \geq 0$-ra $L(\varphi) \geq 0$) lineáris funkcionál, akkor létezik egyetlen Borel mérték M-en, hogy $\forall \varphi \in C(M)$-re $\int \varphi \, d\mu = L(\varphi)$.