# 7. HOPF GEOMETRIAI MÓDSZERE

A módszert legegyszerűbb a tórusz algebrai automorfizmusának esetére elmondanunk. Közvetlenül csak az ergodicitást adja, a keverést nem, viszont a módszer szoros összefüggésben áll a hiperbolikus dinamikai rendszerek elméletének gyökereivel, és az általános, nem-egzakt esetekben lényegében az egyetlen eszköz ergodicitás igazolására. Tehát igazoljuk a T6.5-nél valamivel gyengébb állítást:

**7.1 Tétel.** *A tórusz hiperbolikus algebrai automorfizmusa ergodikus.*

*Bizonyítás.* Egyszerűség kedvéért legyen $d = 2$, vagyis mindkét sajátérték valós és legyen $|\lambda_s| < 1$, $|\lambda_u| > 1$. Ebben az esetben $A$-nak vannak $\mathbb{R}^2$-beli sajátvektorai: $e_s$ és $e_u$. A bizonyítás fontos eszközei a *szűkülő illetve táguló fonalak.*

**7.2 Definició.** *A $T$ leképezés $x \in S^d$ ponton keresztül átmenő szűkülő (stabil) fonala*

$$\gamma^s(x) = \{y \in S^d \colon \lim_{n\to\infty} \text{dist } (T^n x, T^n y) = 0\}$$

*és táguló (instabil) fonala*

$$\gamma^u(x) = \{y \in S^d \colon \lim_{n\to-\infty} \text{dist } (T^n x, T^n y) = 0\}$$

Valójában $T$ stabil (instabil fonala) éppen a $T^{-1}$ leképezés instabil (stabil) fonala. Esetünkben e fonalak könnyen leírhatók:

$$\gamma^s(x) = \{\tilde{x} + t\ e_s (\text{mod } \mathbb{Z}^2) \colon t \in \mathbb{R}\}$$

$$\gamma^u(x) = \{\tilde{x} + t\ e_u (\text{mod } \mathbb{Z}^2) \colon t \in \mathbb{R}\}\ ,$$

tehát ténylegesen mindkettő a tórusz $e_s$ illetve $e_u$ irányú feltekerésének (v.ö. P1.10) pályája.

Térjünk rá Hopf módszerére. Belátjuk, hogy $\forall f \in C(S^2)$-re az ergodtételben szereplő $\overline{f} = \text{const}$. Ez valóban elegendő, hiszen $\forall f \in L_2$-höz és $\forall \varepsilon$-ra található $f_\varepsilon \in C(S^2)$, hogy $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Mármost $\lim_{n\to\infty} A_n f = \prod_{\mathcal{I}} f$ és $\lim_{n\to\infty} A_n f_\varepsilon = \prod_{\mathcal{I}} f_\varepsilon$, ahol $\prod_{\mathcal{I}}$ jelöli az $\mathcal{I}$-re való vetítést $L_2$-ben. Ha tehát $f_\varepsilon \xrightarrow{L_2} f$, akkor egyúttal $\prod_{\mathcal{I}} f_\varepsilon \xrightarrow{L_2} \prod_{\mathcal{I}} f$, de konstans függvények limesze konstans.

Automorfizmusról lévén szó, hivatkozunk a T 2.7 ergodtételre és az M 2.8 megjegyzésre:

egyrészt $\mu$-m.m. $x \in S^2$-re $n \to \infty$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}(f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{n-1}x)) \to \overline{f}(x) \\
&\frac{1}{n}(f(x) + f(T^{-1}x) + \cdots + f(T^{-n-1}x)) \to \overline{f}^{-}(x) \ ,
\end{aligned}$$

és $\overline{f}^{-} = \overline{f}$ áll $\mu$-m.m. $x$-re. Jelöljük

$$J := \{x \in S^2 : \quad \overline{f}^{-}(x) = \overline{f}(x)\} \ . \tag{7.3}$$

Mivel $f$ egyenletesen is folytonos, igazak a következő egyszerű megállapítások:

1. Ha $x, y \in \gamma_s$ és $\overline{f}(x)$ létezik, akkor $\overline{f}(y)$ is létezik, és $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$.
2. Ha $x, y \in \gamma_u$ és $\overline{f}^{-}(x)$ létezik, akkor $\overline{f}^{-}(y)$ is létezik, és $\overline{f}^{-}(x) = \overline{f}^{-}(y)$.

Igazoljuk 1.-et. $f$ egyenletes folytonossága következtében $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ hacsak $\varrho(x, x') < \delta$. Mivel $\varrho(T^k x, T^k y) \to 0$, ha $k \to \infty$ (valójában a konvergencia sebessége $|\lambda_s|^k$, vagyis exponenciális), ezért $\varrho(T^k x, T^k y) < \delta$, ha $k \geq k_0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(T^k x) - f(T^k y))\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{k_0-1}(\qquad) + \sum_{k=k_0}^{n-1}(\qquad)\right| \leq \\
&\leq \frac{2\max|f|k_0}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

ha $n$ elég nagy.

Könnyű látni, hogy ha $\overline{f}(x)$ és $\overline{f}^{-}(x)$ $\forall x \in S^d$-re létezne és egyenlő lenne, akkor 1. és 2. már automatikusan adnák, hogy $\overline{f} = \text{const}$ mindenütt. A bizonyítás hátralevő részében azzal a nehézséggel kűzdünk meg, hogy vannak kivételes pontok.

Tekintsünk $S^2$-en egy elég kis $P$ parallelogrammát, amelynek oldalai párhuzamosak az $e_s$ illetve $e_u$ sajátvektorokkal. Jelölje általában $x \in P$ esetén $\gamma_P^s(x)$ és $\gamma_P^u(x)$ a $\gamma^s(x)$ illetve $\gamma^u(x)$ fonál $x$-et tartalmazó összefüggő komponensét. Rögzítsünk egy $x_0 \in P$ pontot. Akkor nyilván

$$P = \bigcup_{x \in \gamma_P^u(x_0)} \gamma_P^s(x) = \bigcup_{x \in \gamma_P^s(x_0)} \gamma_P^u(x) \ ,$$

ami egyben $P$ direkt szorzat alakban való előállítását is adja : $P = \gamma_P^s(x_0) \otimes \gamma_P^u(x_0)$, sőt a $P$-n vett Lebesgue-mérték is a tényezőkön vett Lebesgue-mértékek szorzatának konstansszorosa (a konstans $= |\sin \sphericalangle(e_s, e_u)|$). Nevezzük $\gamma_P^s(x)$-t (illetve $\gamma_P^u(x)$-t) *jó fonálnak*, ha majdnem minden pontja $\in J$ (v.ö. (7.4)). Fubini tétele miatt $\gamma_P^u(x_0)$ majdnem minden $x$ pontjára a rajta keresztül átmenő $\gamma_P^s(x)$ fonál jó. Feltehetjük, hogy $\gamma_P^s(x_0)$ jó fonál. Tekintsük a

$$B := \bigcup_{x \in \gamma_P^s(x_0) \cap J} (\gamma_P^u(x) \cap J)$$

halmazt. Egyrészt ismét Fubini tétele miatt $\mu(B) = \mu(P)$, mivel $\mu$-m.m. $x \in \gamma_P^s(x_0)$-ra is a $\gamma_P^u(x)$ fonál jó.

Belátjuk, hogy $\forall y, z \in B$-re $\overline{f}(y) = \overline{f}^{-}(y) = \overline{f}(z) = \overline{f}^{-}(z)$, ami rögtön adja, hogy $B$-n az $\overline{f}(y) = \overline{f}^{-}(y)$ függvény konstans. Legyen $y \in \gamma_P^u(y') \cap J$, $z \in \gamma_P^u(z') \cap J$. Ekkor igaz a következő egyenlőséglánc:

$$\overline{f}(y) = \overline{f}^{-}(y) = \overline{f}^{-}(y') = \overline{f}(y') = \overline{f}(z') = \overline{f}^{-}(z') = \overline{f}^{-}(z) = \overline{f}(z)$$

(a hét egyenlőség rendre igaz, mert 1. $y \in J$; 2. $y \in \gamma_P^u(y')$; 3. $y' \in J$; 4. $z' \in \gamma_P^s(y')$; 5. $z' \in J$; 6. $z \in \gamma_P^u(z')$; 7. $z \in J$).

A tétel igazsága végül abból adódik, hogy egyrészt $S^2$ lefedhető véges sok fenti típusú parallelogrammával: $S^2 \subset \cup P_i$, másrészt azután mindegyik parallelogrammát centrálisan picit nagyítva, és felhasználva, hogy azokon a limesz $\mu$-m.m. konstans, könnyen adódik, hogy ez a konstans minden parallelogrammára ugyanaz. □

**Megjegyzés.** Hopf módszere az alapvető módszer kaotikus tulajdonságok: hiperbolicitás, ergodicitás, keverés, ... igazolására. Eberhard Hopf 1938-ban (és 1939-ben G. A. Hedlund is) ezzel a gondolattal mutatta meg kompakt, konstans negatív görbületű felületen adott geodetikus áramlás ergodikus voltát. A mószer páratlan előnye, hogy messzemenően általánosítható. Alkalmazható nemcsak síma leképezésekre, hanem szakadásos leképezésekre is, pl. a pék leképezésére is működik. Ennek ergodicitását ugyan tudjuk abból, hogy izomorf egy Bernoulli-automorfizmussal. Ugyanakkor erre is könnyen megtalálhatók a stabilis és instabil sokaságok, és a módszer működik.

**Feladat:** Keressük meg a pék leképezésére a stabilis és instabil invariáns sokaságokat.∎