6. A TÓRUSZ ALGEBRAI AUTOMORFIZMUSA

A d-dimenziós tórusz, $S^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ kompakt Abel csoport, amelyen továbbra is μ jelöli a Lebesgue-mértéket. (Több itt bevezetendő fogalom kiterjeszthető általában kompakt Abel-csoportokra, amelyeken Haar Alfréd tételének speciális eseteként létezik a csoport-eltolásra (l. P 3.10) invariáns un. Haar-mérték, mi azonban maradunk a tórusz példájánál.)

6.1 Definició. *Az $(S^d, \mathcal{F}, \mu, T)$ automorfizmust csoport-automofizmusnak nevezzük, ha*

(i) *T és T^{-1} folytonosak,*

(ii) *$\forall x, y \in S^d$-re $T(x+y) = Tx + Ty$.*

Legyen $A = (a_{jk})_{1\le j,k\le d}$ egész elemű mátrix, amelyre $|\det A| = 1$.

6.2 Lemma. *S^d-nek a*

$$Tx \equiv Ax \qquad (mod\ \mathbb{Z}^d)$$

reláció által értelmezett automorfizmusa csoport-automorfizmus.

Bizonyítás: Jelölje általában $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ az $x \in S^d$ elem valamely felemeltjét. Először belátjuk, hogy T jólértelmezett. Ez azonnal adódik abból a feltételből, hogy A elemei egészek. Könnyű látni, hogy T^{-1} is egyértékű. Valóban, $|\det A| = 1$ miatt A^{-1} létezik, sőt elemei egészek. T és T^{-1} folytonossága nyilvánvaló. A $|\det A| = 1$ feltevésből az is folyik, hogy a Lebesgue-mérték invariáns. Befejezésül

$$T(x+y) \equiv A(x+y) = Ax + Ay \equiv Tx + Ty\ ,$$

ahol a $\equiv$ kongruencia mindig (mod $\mathbb{Z}^d$). $\square$

Először a Fourier-analízis eszközével szükséges és elégséges feltételt adunk a tórusz algebrai automorfizmusának ergodicitására.

6.3 Definició. *A* $\chi: S^d \to \mathbb{C}$ *nem azonosan eltűnő, folytonos függvényt karakternek nevezzük, ha* $\forall x, y \in S^d - re$

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \ .$$

6.4 A definició egyszerű következményei:

1. $\forall \chi$ karakterre $\chi(0) = 1$, ugyanis $\chi(0) = 0$-ból $\chi(x) \equiv 0$ adódna.
2. $\forall \chi_1, \chi_2$ karakter-párra $\chi_1 \chi_2$ is karakter.
3. Az összes karakter ilyen alakú:

   $$\chi_n(x) = \exp(2\pi i(n, x))$$

   ahol $n \in \mathbb{Z}^d$ (ezek ugyanis a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldásai).
4. Az $\widehat{S^d} := \{\chi_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ csoportot *duális csoportnak* nevezzük.
5. $\int_{S^d} \chi_n(x)\mu(dx) = \delta_{0,n}$.
6. A karakterek teljes ortonormált rendszert alkotnak $L_2(S^d, \mu)$-ben, ahol a skalárszorzat $< \phi, \psi > := \int \phi(x)\bar{\psi}(x)\mu(dx)$. Speciálisan $< \chi_n, \chi_m >= \delta_{n-m}$.
7. $\widehat{S^d}$-n is tekinthetjük az indukált leképezést: $\chi \in \widehat{S^d}$-re

   $$(\hat{T}\chi)(x) := \chi(Tx) \ .$$

   $\hat{T}\chi$ valóban karakter, mert

   $$(\hat{T}\chi)(x+y) = \chi(T(x+y)) = \chi(Tx)\chi(Ty) = (\hat{T}\chi)(x)(\hat{T}\chi)(y) \ .$$

8. $\hat{T}\chi_n = \chi_{A^*n}$.
9. $\widehat{S^d} \subset L_2(S^d, \mu)$, így valójában $\hat{T}$ a 2. fejezetben használt $\hat{T}: L_2 \to L_2$ leképezés $\widehat{S^d}$-re való megszorítása, így $\hat{T}$ itt is unitér. (N. B. T így $\hat{T}$ is invertálható.
10. $\hat{T}(\chi_1 . \chi_2) = \hat{T}\chi_1 . \hat{T}\chi_2$ és $(\hat{T})^{-1} = \widehat{T^{-1}}$.

    Tehát $\hat{T}$ is csoport-automorfizmus.

6.5 Tétel. *A tórusz T algebrai automorfizmusa csakkor keverő, ha* $\forall\chi(\not\equiv 1) \in \widehat{S^d}$ *karakterre a* $\{(\hat{T})^k\chi\colon k \in \mathbb{Z}\}$ *trajektória végtelen, azaz aperiódikus. Ebben az esetben T keverő is.*

Bizonyítás: Tegyük fe, hogy T ergodikus, de $\exists\chi(\not\equiv 1) \in \widehat{S^d}$ és $\exists m(\neq 0) \in \mathbb{Z}$, hogy $(\hat{T})^m\chi = \chi$. Legyen $m > 0$ a minimális ilyen m. Könnyű látni, hogy

$$f := \frac{1}{m}(\chi + \hat{T}\chi + \cdots + (\hat{T})^{m-1}\chi)$$

invariáns függvény S^d-n. T ergodikus lévén $f = \text{ const } = c$, viszont akkor (6.4) 5. pontja miatt

$$0 = \langle c, \chi\rangle = \frac{1}{m}\langle\chi, \chi\rangle ,$$

ami azonban pozitív. Ezzel indirekte beláttuk, hogy az indukált trajektória végtelen.

Most ez utóbbit feltéve megmutatjuk, hogy T keverő. Ehhez elég belátni, hogy $\forall f, g \in L_2^o$-ra (ahol $L_2^o := \{f \in L_2\colon \int f d\mu = 0\}$)

$$\lim_{n\to\infty}\langle\hat{T}^n f, g\rangle = 0 . \tag{6.6}$$

Tekintsük f és g Fourier sorait:

$$f = \sum_{k\neq 0} a_k\ \chi_k , \qquad g = \sum_{k\neq 0} b_k\ \chi_k .$$

(6.4) 6. pontja miatt (6.6)-ot elég belátni arra az esetre, amikor f és g Fourier sorai végesek. Viszont

$$\langle\hat{T}^n f, g\rangle = \sum_{k\neq 0}\sum_{\ell\neq 0} a_k b_\ell \langle\hat{T}^n\chi_k, \chi_\ell\rangle .$$

(6.4) 5. és 8. pontja miatt $\langle\hat{T}^n\chi_k, \chi_\ell\rangle \neq 0$ kizárólag akkor, ha $\hat{T}^n\chi_k = \chi_\ell$. Feltevésünk miatt azonban ez elég nagy n-re nem fordulhat elő, így elég nagy n-re $\langle\hat{T}^n f, g\rangle = 0$. $\square$

6.7 Definició. *A tórusznak az A mátrix által származtatott $(S^d, \mathcal{F}, \mu, T)$ automorfizmusát hiperbolikusnak nevezzük, ha* Spec $A \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$.

T6.5 egyszerű következménye a

6.8 Tétel. *Ha a tórusz T algebrai automorfizmusa hiperbolikus, akkor T ergodikus és keverő.*

Bizonyítás. Ha az A mátrix által származtatott T automorfizmus nem ergodikus, ha $\exists k \neq 0$ és $\exists n (\neq 0) \in \mathbb{Z}^d$ hogy $(\hat{T})^k \chi_n = \chi_n$, vagyis (6.4) 8. pontja miatt $(A^*)^k n = n$. Ekkor természetesen A^*-nak – és egyúttal – A-nak van sajátértéke az egységkörön. Vagyis ha ez nincs így, akkor T ergodikus, sőt keverő. $\square$

Pl. $d = 2$ esetén vagy mindkét sajátérték az egységkörön van, vagy mindkettő valós és egyikükre $|\lambda_s| < 1$, a másikra $|\lambda_u| > 1$ (itt s a stable, u az unstable szó kezdőbetűje; ennek magyarázatát l. a 7. fejezetben).

T 6.5 bizonyítása erősen használta a (6.4) tulajdonságokat, amelyek egyik lényeges feltétele volt, hogy T csoport-automorfizmus. A következő fejezetben a tórusz algebrai automorfizmusa ergodicitásának alátámasztására olyan ‚geometriai' módszert ismertetünk, amely nem használja ki a leképezés, ‚egzakt' tulajdonságait, ezért messzemenően általalánosítható.