5. KEVERÉS ÉS KINETIKA.

Célunk a *keverés* fogalmának bevezetése, amely az ergodicitásnál valamivel erősebb sztohasztikus tulajdonság. Fontos alkalmazása: biztosítja a szóbanforgó dinamikai rendszer egyensúlyhoz való tartását alkalmas kezdeti mértékek esetén (ezt nevezik a *kinetika* problémájának).

Az ergodtételekből folyik, hogy az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ ergodikus endomorfizmusra $f \in L_2$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int f d\mu = c \tag{5.1}$$

teljesül μ-m.m. $x \in M$-re és L_2-értelemben is. Lévén $g \in L_2$-re $\|(A_n f)g - cg\|_1 \leq \|A_n f - c\|_2 \ \|g\|_2$, (5.1)-ből egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f(T^k x) g(x) d\mu = \int f d\mu \int g d\mu \tag{5.2}$$

is következik.

5.3 Lemma. *(5.2) ekvivalens T ergodicitásával.*

Bizonyítás: Valóban, legyen $A \in \mathcal{I}$, $f = g = \chi_A$. Akkor (5.2)-ből kapjuk: $\mu(A \cap A) = \mu(A) \cdot \mu(A)$, ahonnan $\mu(A) = 0$ vagy 1. $\square$

5.4 Definició. *A T endomorfizmus keverő, ha $\forall f, g \in L_2$ párra*

$$\lim_{n\to\infty} \int f(T^n x) g(x) d\mu = \int f d\mu \int g d\mu \ .$$

Standard gondolattal igaz az

5.5 Lemma. *A T endomorfizmus csakkor keverő, ha $\forall A, B \in \mathcal{F}$-re*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B) \ .$$

Innen egyszerűen adódik az

5.6 Lemma.

(1) *Keverőnek lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

(2) *A keverésből következik az ergodicitás.*

Bizonyítás. (1) a definíció közvetlen következménye. (2) így látható be: a keverésből azonnal következik (5.2), így az 5.3 Lemma miatt az ergodicitás is. □

Keverő leképezések alappéldái a Bernoulli-endomorfizmusok.

5.7 Tétel. *Minden Bernoulli-endomorfizmus (automorfizmus) keverő.*

Bizonyítás: T4.6 bizonyításának módszere a keverést is kiadja. Valóban, az ott is használt approximációs tulajdonság miatt $\forall A, B \in \mathcal{F}$-re és $\forall \varepsilon > 0$-ra van (4.9) alakú A_ℓ illetve B_ℓ, hogy $\mu(A \circ A_\ell), \mu(B \circ B_\ell) < \varepsilon$. Ekkor

$$\mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) + [\mu(A \circ T^{-n}B) - \mu(A_\ell \circ T^{-n}B_\ell)] \ .$$

Mármost, ha $n > \ell$, akkor $\mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) = \mu(A_\ell)\mu(B_\ell)$, viszont (4.11)-hez hasonlóan

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell)| < 2\varepsilon$$

vagyis elég nagy n-re

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 4\varepsilon \ .$$

□

Uganakkor a körvonal forgatása nem keverő.

5.8 Lemma. *Ha α irracionális, akkor T_α nem keverő.*

Bizonyítás: Legyen $A = B = I = [a, b] \subset S$ tetszőleges intervallum. $\{n\alpha\}$ sűrű S-en (l. T2.1 bizonyítása után), így $|\mu(I \cap T^{-n}I) - \mu(I)|$ alkalmas n-re tetszőleges kicsivé tehető, ami $0 < \mu(I) < 1$ esetén ellentmondana $\lim_{n\to\infty} \mu(I \cap T^{-n}I) = \mu^2(I)$-nek. □

Nézzük a keverés tulajdonságának egy egyszerű, de fontos alkalmazását. Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ leképezés-félcsoport, de a $t = 0$ időpontban indítsuk rendszerünket a

μ_0 nem-invariáns mértékből. Ekkor $t(>0)$ időben rendszerünk eloszlása így adható meg: $A \in \mathcal{F}$-re

$$\mu_t(A) = \mu_0\{x: T^t x \in A\} = \mu_0(T^{-t}A).$$

Tegyük fel, hogy μ_0 abszolút folytonos az invariáns μ-re nézve, és tegyük fel, hogy $\frac{d\mu_0}{d\mu} \in L_2(\mu)$. Ekkor

$$\mu_s(A) = \int_M \chi_A(T^s x) d\mu_0 = \int \chi_A(T^s x) \frac{d\mu_0}{d\mu}(x) d\mu \ .$$

Ha T ergodikus, akkor (5.2) miatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mu_s(A) ds = \mu(A) \int \frac{d\mu_0}{d\mu}(x) d\mu = \mu(A) \ .$$

Sőt, ha T keverő is, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(A) = \mu(A) \tag{5.9}$$

is áll. Tehát igaz az

5.10 Tétel. *Ha a $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ egyensúlyi dinamika keverő, és a μ_0 nem-egyensúlyi kezdeti mértékre $\frac{d\mu_0}{d\mu} \in L_2(\mu)$, akkor (5.9) igaz $\forall A \in \mathcal{F}$-re.*