4. STACIONÁRIUS SOROZATOK MINT DINAMIKAI RENDSZEREK, BERNOULLI-SOROZATOK

Legyen $M = E^{\mathbb{Z}}$ (vagy $M = E^{\mathbb{Z}_+}$) ahol E véges vagy megszámlálható halmaz. $x \in M$ tehát így írható: $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. *Hengerhalmaznak* nevezzük a $H \subset M$ részhalmazt, ha alkalmas $\ell \geq 1$-re, $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ indexekre és $E_1, \dots, E_\ell \subset E$ részhalmazra

$$H = \{x \in M \colon x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} \ .$$

Jelölje $\mathcal{F}$ a hengerhalmazok által generált σ-algebrát, és legyen μ valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en. (Szokás általánosabban hengerhalmaznak nevezni a

$$H = \{x \in M \colon (x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}) \in E\} \ .$$

halmazokat, ahol $E \subset E^\ell$ tetszőleges mérhető részhalmaz. Az ezek által generált σ-algebra természetesen ugyancsak $\mathcal{F}$.)

4.1 Definició. *A μ mérték stacionárius, ha tetszőleges H hengerhalmazra és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re*

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \mu\{x_{i_1+k} \in E_1, \dots, x_{i_\ell+k} \in E_\ell\} \ .$$

4.2 Definició. *A $(Tx)_i = x_{i+1}$ összefüggéssel értelmezett $T \colon M \to M$ automorfizmust bal-eltolásnak (bal-shiftnek) nevezzük. Analóg módon értelmezhető a T bal-eltolás, ha $M = E^{\mathbb{Z}_+}$, amely ekkor csak endomorfizmus, mert nyilvánvaló módon nem invertálható.*

Könnyű látni, hogy az $(M, \mathcal{F})$-en adott μ mérték csakkor stacionárius, ha invariáns a T bal-eltolásra nézve.

Hasonlóan értelmezhetjük az $M = E^{\mathbb{Z}_+}$ téren is a bal-eltolást, amely most endomorfizmus. További természetes általánosítási lehetőségek: (i) E helyett vehetjük $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t, illetve $\mathbb{Z}_{(+)}$ helyett $\mathbb{R}_{(+)}$-t.

4.3 Definició. *Ha a μ stacionárius mérték egyúttal szorzatmérték, azaz $\forall \ell, i_1 < \ldots < i_\ell, E_1, \ldots, E_\ell$ választásra*

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \ldots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \prod_{j=1}^{\ell} \mu\{x_{i_j} \in E_j\},$$

akkor a D 4.2-ben definiált automorfizmust Bernoulli-automorfizmusnak nevezzük. (Analóg a Bernoulli-endomorfizmus fogalma.)

P 1.10-ben már szó esett a $T\colon [0,1) \to [0,1) \qquad Tx = \{2x\}$ bináris leképezésről. Legyen $x \in [0,1)$ bináris előállítása $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$, amit szimbólikusan így írhatunk: $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Könnyű látni, hogy akkor $Tx = (x_1, x_2 \ldots)$, azaz T ugyanúgy hat mint a bal-eltolás. Pontosabban:

4.4 Definició. *Az $(M_i, \mathcal{F}_i, \mu_i, T_i)\colon i = 1,2$ endomorfizmusokat izomorfaknak (konjugáltaknak) nevezzük, ha $\exists M_i' \subset M_i$, hogy $\mu_i(M_i \setminus M_i') = 0$ és $\exists \varphi\colon M_1' \to M_2'$ 1-1 értelmű leképezés, hogy $\forall A_i \subset M_i', \quad A_i \in \mathcal{F}_i \quad (i = 1,2)$-re*

$$\mu_1(\varphi^{-1} A_2) = \mu_2(A_2) \quad (*) \text{ és } \mu_2(\varphi A_1) = \mu_1(A_1)$$

továbbá M_1'-n áll: $\varphi T_1 = T_2 \varphi \quad (*)$ és M_2'-n áll: $T_1 \varphi^{-1} = \varphi^{-1} T_2$.

Amennyiben ϕ nem invertálható, és az utóbbi relációpárok közül csak a (*)-gal jelzetteket követlejük meg, akkor az endomorfizmusokat szemi-konjugáltaknak nevezzük.

A fenti tulajdonságot szokás kommutatív diagramban is ábrázolni:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{T_1} & M_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xrightarrow{T_2} & M_2 \end{array}$$

Legyen speciálisan $M_1 = [0,1)$, $M_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, $T_1 x = \{2x\}$, $T_2(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, μ_1 a Lebesgue mérték és μ_2 az $\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)$ mértékek szorzata. Ekkor könnyű látni, hogy a két endomorfizmus izomorf. Az izomorfia fogalmára vonatkozólag könnyű gyakorlat:

4.5 Lemma. *Ergodikusnak lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

Így a bináris leképezés ergodicitása következni fog egy általános tételből.

4.6 Tétel. *Minden Bernoulli-endomorfizmus (-automorfizmus) ergodikus.*

Térjünk rá T4.6 bizonyítására. Előrebocsátunk egy egyszerű feladatot.

4.7 Feladat. *A mérhető halmazok $\sigma-$algebráján*

$$\rho(X,Y) = \mu(X \circ Y) \tag{(4.8)}$$

szemi-metrika (azaz $\rho(X,Y) = 0$-ból nem feltétlen következik $X = Y$). Ugyanakkor az egymástól nullmértékű halmazban különböző mérhető részhalmazok ekvivalencia-osztályain már a fenti ρ metrika.

Legyen $A \in \mathcal{I}$. A mértékelméletből (vagy a valószínűségszámításból) jólismert a következő approximációs tulajdonság: $\forall A \in \mathcal{F}$-hez és $\forall \varepsilon > 0$-hoz található olyan $\ell \in \mathbb{Z}_+$ és $A_\ell \in \mathcal{F}$ hengerhalmaz, amely ilyen alakú: alkalmas $\tilde{A}_\ell \subset E^{\ell+1}$-lel

$$A_\ell = \{x \in M: (x_0, x_1, \ldots, x_\ell) \in \tilde{A}_\ell\} \tag{4.9}$$

és emellett $\mu(A \circ A_\ell) < \varepsilon$ (azaz a szorzattér bármely mérhető halmaza tetszőlegesen jól közelíthető (véges tartójú) hengerhalmazzal). A stacionaritás következtében $\mu(T^{-n}A \circ T^{-n}A_\ell) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$. Ha $A \in \mathcal{I}$, akkor

$$\mu(A) = \mu(A \cap T^{-n}A) = \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell) + [\mu(A \cap T^{-n}A) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell)]\ . \tag{4.10}$$

Mármost $|\mu(X \cap Y) - \mu(U \cap V)| \leq \mu(X \circ U) + \mu(Y \circ V)$ (amiből valójában az következik, hogy $\mu(X \cap Y)$ mindkét változójában folytonos) miatt

$$|(\mu(A \cap T^{-n}A) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell)| \leq \mu(A \circ A_\ell) + \mu(T^{-n}(A \circ A_\ell)) < 2\varepsilon \tag{4.11}$$

így

$$|\mu(A) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell)| < 2\varepsilon\ .$$

Azonban elég nagy n-re, egészen pontosan $n > l$-re – használva, hogy T Bernoulli-eltolás – $\mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell) = (\mu(A_\ell))^2$, ezért $\forall \varepsilon > 0$-ra

$$|\mu(A) - (\mu(A))^2| < |\mu(A) - (\mu(A_\ell))^2| - |(\mu(A))^2 - (\mu(A_\ell))^2| <$$

$$< 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon\ .$$

Tehát $\mu(A) = 0$ vagy 1. $\square$

L4.5 és T4.6-ból adódik a

4.12 Következmény. *A bináris leképezés ergodikus.*

Analóg módon tárgyalható a

4.13 Példa. A pék automorfizmusa. *Itt* $M = [0,1)^2$, μ *a Lebesgue-mérték, és* $(u,v) \in M$*-re*

$$T_1(u,v) := \begin{cases} (\{2u\}, v/2) & ha \ \ 0 \le u < 1/2 \\ (\{2u\}, \frac{v+1}{2}) & ha \ \ 1/2 \le u < 1 \end{cases}$$

A leképezés így hat: először az egységnégyzetet az u-tengely irányában 2-szeresére nyújtjuk, és egyúttal a v-tengely irányában 1/2-szeresére zsugorítjuk (a terület invariáns marad!), majd a kapott téglalapnak az egységnégyzetből kilógó felét annak felső felébe toljuk párhuzamosan. (A pék megközelítőleg valami ilyet csinál.) A T_1 automorfizmus a *pék automorfizmusa.*

Tekintsük a következő Bernoulli-eltolást: $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, μ ismét az $(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$ mértékek szorzata, és T_2 a bal-eltolás. Könnyű látni, hogy a

$$\phi((\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i}, \right)$$

egyenlettel értelmezett $\phi : M_2 \to M_1$ leképezés izomorfia, ezért L4.5 és T4.6-ból ismét adódik a

4.14 Következmény. *A pék automorfizmusa ergodikus.*

Az ergodicitás itt T4.6-ból jön. Lehetséges más bizonyítás is, amely a geometriai képen alapszik, nevezetesen azon, hogy a pék automorfizmusa az egyik irányban nyújt, a másikban zsugorít. Ezt a mechanizmust *hiperbolikus viselkedésnek* nevezzük. Eberhard Hopf ezt kihasználó geometriai módszerét a 7. fejezetben tárgyaljuk.

Befejezésül mégegy megjegyzés. Fenti módszerünk így is értelmezhető: a számunkra érdekes dinamikák (bináris leképezés, a pék automorfizmusa, ...) helyett a sorozatok terén keresünk velük izomorf eltolást. Ez utóbbi gyakran áttekinthetőbb objektum, általános struktúra, és tanulmányozásához felhasználhatóak pl. az algebra, a kombinatorika, valamint — a mérték stacionaritása miatt — a valószínűségszámítás, sőt az információelmélet illetve a statisztikus fizika (egydimenziós rendszerek) eredményei is. Fontossága miatt az objektumnak, illetve a módszernek külön neve van: *szimbolikus dinamika.* A módszert a 70-es években Bowen, Ruelle és Szináj alapozták meg, és azóta is rendkivül széles körben alkalmazzák a dinamikai rendszerek tanulmányozása során.

A $\mathcal{I}$ σ-algebra mellett másik fontos σ-algebra az ún. *farok σ-algebra.*

D4.15 Definició. *Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus $\mathcal{T}$ farok σ-algebrája*

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n ,$$

ahol $\mathcal{F}_n$ a következő típusú H hengerhalmazok által generált σ-algebra: alkalmas $\widetilde{H} \in E^{\ell+1}$-re

$$H := \{x \in M : (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+\ell}) \in \widetilde{H}\} .$$

Automorfizmusok esetén $\mathcal{T}$ mellett létezik még T^{-1} $\mathcal{T}^-$-farok σ-algebrája is, amely nem feltétlenül azonos $\mathcal{T}$-vel.

Igen hasznos az egyszerű

L4.16 Lemma. $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$.

L4.16 bizonyítása. Valóban, ha $A \in \mathcal{I}$, akkor alkalmas $\widetilde{A} \in E^{\mathbb{Z}_+}$-ra

$$A = \{x \in M : (x_0, x_1, \ldots,) \in \widetilde{A}\} .$$

Azonban $\forall n \geq 0$-ra $A = T^{-n} A \pmod 0$, vagyis

$$A = \{x \in M : \ (x_n, x_{n+1}, \ldots) \in \widetilde{A}\} \qquad \pmod 0 .$$

Tehát $\forall n \geq 0$-ra $A \in \mathcal{F}_n$, következésképp $A \in \mathcal{T}$.

□ L4.16 □

A lemma jelentősége abban áll, hogy bizonyos esetekben $\mathcal{T}$ trivialitása is igaz, sőt ezt könnyebb közvetlenül bizonyítani mint $\mathcal{I}$-ét (l. T4.6 bizonyítását).

Egy megjegyzés a bináris leképezésről.

Korábban a bináris leképezést kétféle felfogásban is tekintettük: egyrészt mint a $[0, 1]$ intervallum, másrészt mint a körvonal endomorfizmusát és mindkét objektumot azonosítottuk $[0, 1)$-gyel. Az előbbi esetben a leképezés szakadásos, a másodikban síma (más az intervallum és más a körvonal topológiája!). Ha a körvonalat (1-re normált, így 1 periódusú) szögváltozó értelmezési tartományának fogjuk fel, akkor tehát a P1.10-beli jelöléssel élve $f(\theta) = 2\theta$. Ezt a leképezést kiterjeszthetjük a sík leképezésévé a következőképpen: legyenek r, θ polár-koordináták, és legyen

$$f^*(r, \theta) := (r^{\frac{1}{2}}, 2\theta).$$

$r = 1$-t helyettesítve azt látjuk, hogy $f^*(1, \theta) = (1, 2\theta) = (1, f(\theta))$.

F4.17 Feladat: Hogyan viselkednek $n \to \infty$ esetén az $(f^*)^n(r, \theta)$ pályák?