## 3. TOVÁBBI PÉLDÁK. ERGODIKUS LEKÉPEZÉSEK.

**3.1 Tétel.** *A körvonal $\alpha$ szöggel való forgatása akkor és csak akkor ergodikus, ha $\alpha$ irracionális.*

Bizonyítás. Legyen az $f\colon S \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvény Fourier sora $f(x) = \sum_n a_n e^{2\pi i n x}$ (a sor $L_2$-értelemben konvergál). Ekkor

$$\hat{R}_\alpha f(x) = f(R_\alpha x) = \sum_n (e^{2\pi i n \alpha} a_n) e^{2\pi i n x} \ . \tag{3.1}$$

Tudjuk, hogy $f = \hat{R_\alpha} f$ csak akkor, ha $\forall n$-re $a_n = e^{2\pi i n \alpha} a_n$. Mármost ha $\forall n \neq 0$-ra $a_n = 0$ teljesül, akkor $f = \text{const}$. Ha ellenben $\exists n_0 \neq 0$ hogy $a_{n_0} \neq 0$, akkor $e^{2\pi i n_0 \alpha} = 1$, ami pontosan akkor áll, ha $\exists k \in \mathbb{Z}$, hogy $n_0 \alpha = k$. Tehát $\alpha \in \mathbb{Q}$. $\square$

$R_\alpha$ ergodicitásának és Birkhoff-Hincsin tételének folyománya, hogy $\mu$-m.m. $x$-re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x + k\alpha\}) \to \mu(I) \tag{3.2}$$

ha $n \to \infty$. Itt azonban igaz az erősebb

**3.3 Tétel.** *(3.2) teljesül $\forall x \in S$-re.*

Innen $x = 0$ választással már adódik Weyl tétele is (T 2.9).

Bizonyítás.

**3.4 Definició.** *Az $\{x_n \colon x_n \in S, \quad n \in \mathbb{Z}_+\}$ sorozat egyenletes eloszlású, ha tetsző-leges $I \subset S$ intervallumra*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x_k\}) \to \mu(I) \ .$$

Először szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy az $\{x_n\}$ sorozat egyenletes eloszlású legyen.

**3.5 Lemma.** *Az $\{x_n\}$ sorozat csak akkor egyenletes eloszlású, ha $\forall f \in C(S)$ függvényre*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i) \to \int_S f d\mu \ . \tag{3.6}$$

A lemma igazolását későbbre halasztva bizonyítsuk tételünket. Legyen $f \in C(S)$. T 3.1-ből következik, hogy $\mu$-m.m. $x \in S$-re

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) \to \int f d\mu \qquad (n \to \infty) \ . \tag{3.7}$$

Megmutatjuk, hogy e konvergencia $\forall x \in S$-re is áll. Valóban legyen $\overline{x} \in S$ olyan pont, amelyre (3.7) igaz, és legyen $x \in S$ tetszőlegesen rögzített. Mivel $\{\{\overline{x}+n\alpha\}\}$ sűrű, ezért alkalmas $\overline{k} = \overline{k}(\delta)$-ra dist $(\{\overline{x}+\overline{k}\alpha\}, x) < \delta$. Igaz viszont

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) - \frac{1}{n+\overline{k}}\sum_{k=1}^{n+\overline{k}} f(\{\overline{x}+k\alpha\})\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\{x+k\alpha\}) - f(\{\overline{x}+(k+\overline{k})\alpha\})\right]\right| +$$
$$+ \frac{\overline{k}}{n+\overline{k}}\max|f| + \frac{\overline{k}}{n(n+\overline{k})}\sum_{k=1}^{n+\overline{k}}|f(\{\overline{x}+k\alpha\})| \ .$$

$f$ egyenletes folytonossága miatt a jobboldali első összeg $< \frac{\varepsilon}{3}$, ha $\delta$ elég kicsi. A második és harmadik tag viszont ránézésre $< \frac{\varepsilon}{3}$, ha $n$ elég nagy. Következésképpen (3.7) $\forall x \in S$-re igaz. $\square$

Bizonyítsuk végül L 3.5 -t. Tegyük fel, hogy (3.6) áll $\forall f \in C(S)$-re és igazoljuk, hogy $\{x_n\}$ egyenletes eloszlású. Jelöljük: $\nu_n(I) := \sum_{k=1}^{n} \chi_I(x_i)$. Fix $\varepsilon > 0$-ra válasszuk meg az $f_*$ és $f^* \in C(S)$ függvényeket, hogy

(i) $f_*(x) \leq \chi_I(x) \leq f^*(x) \qquad \forall x \in S$-re,

(ii) $\int_S (f^* - f_*) d\mu < \varepsilon$.

Ekkor $\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \leq \nu_n(I) \leq \sum_{k=1}^{n} f^*(x_i)$, azaz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \leq \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^*(x_i) \ .$$

Itt (3.6) miatt a bal és jobboldal konvergál $n \to \infty$ esetén $\int f_* d\mu$-höz illetve $\int f^* d\mu$-höz. Sőt

$$\mu(I) - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \mu(I) + \varepsilon \ ,$$

mivel $\int f_* d\mu \le \mu(I) \le \int f^* d\mu$. Az állítás megfordításának igazolását már elég vázolnunk. $\{x_n\}$ egyenletessége azt jelenti, hogy (3.6) áll intervallumok indikátorfüggvényeire. Következőleg (3.6) igaz lesz ilyenek véges lineáris kombinációira is. Viszont ezekkel már minden $f \in C(S)$ jól közelíthető $L_1$-ben — alulról és felülről is, így az előbbi gondolatmenet — mutatur mutandis — elismételhető. $\square$

A körvonal forgatásának többdimenziós általánosítása volt a tórusz eltolása (P 1.10). T 3.1 bizonyításának gondolata átvihető, így érvényes a

**3.9 Tétel.** *A tórusz (1.11)-gyel értelmezett eltolása akkor és csak akkor ergodikus, ha* $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ *racionálisan függetlenek, ahol* $\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_d)$.

Ugyanígy általánosítható T 3.3, D 3.4 és L 3.5 is.

**3.10 Feladat.** (Simányi-Szász) Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, $G$ csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathcal{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathcal{F}, T_G)$ $= \{(M, \mathcal{F}, T_g) : \ g \in G\}$ családot *csoport-hatásnak* nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$ -re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a $G$ csoport hat az $M$ téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az $x$ *$G$-pályájának* nevezük a $Gx := \{T_g x : \ g \in G\}$ halmazt.

Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az $\alpha$-ra ortogonális $g$ vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív $G$ csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a $G$ csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re

$$T_g x = g + x.$$

$\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy $G$-hatást. Bizonyítsuk be, hogy

(1) $G$-nek csakkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az $\alpha$ koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);

(2) Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);

(3) ** Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges $F$ halmaza az $\alpha$-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája

metszi az $U$ halmazt.

A csoport-hatás speciális esete a

**3.11 Példa.** *A csoport-eltolás.*

Legyen $M$ kompakt topológikus csoport és $\mu$ a Haar-mérték $M$-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen

$$T_g\, x = g \cdot x\ .$$

Ekkor $(\mathbb{M}, \mathcal{F}, T_G, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (P1.12 Példa).

**3.12 Feladat.** *Mi $T_G$ ergodicitásának feltétele, ha $G$ Abel-csoport?*

T3.3 bizonyításában döntő szerepe volt a forgatás következő, (3.8)-ban kihasznált tulajdonságának: ha két fázispont távolsága $< \delta$, akkor ez érvényes marad összes képeikre is! A *kezdeti feltételekre való érzéketlenség*, amely itt igen erős és egyenletes, dinamikai rendszerek stabil viselkedésének alapvető jellemzője. Az 5. fejezetben látni fogjuk, hogy a körvonal forgatása, bár ergodikus, de az ennél valamivel erősebb keverő tulajdonsággal már nem rendelkezik.