2005/03/01

2. POINCARÉ REKURRENCIA TÉTELE. ERGODTÉTELEK.

A legegyszerűbb kérdés, amely már a múlt században is foglalkoztatta a dinamikai rendszerekkel foglalkozó kutatókat: visszatérnek-e előbb-utóbb a fázispontok sajátmaguk kis környezetébe. A periódikus pontok persze ilyenek, de ezekből viszonylag kevés van. Poincaré egyszerű tétele igen általános, mert topológiát sem feltételez.

2.1 Tétel. Poincaré rekurrencia tétele, 1899. *Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $A \in \mathcal{F}$. Ekkor A μ-majdnem minden pontja visszatérő, azaz $\mu-m.\ m.$ $x \in A$-ra $\exists n \in \mathbb{Z}_+$, hogy $T^n x \in A$.*

2.2 Következmény. *A $\mu-m.\ m.$ pontja erősen is visszatérő, azaz végtelen sokszor visszatér A-ba.*

Bizonyítás: Poincaré tétele miatt minden n-re T^n is visszatérő, azaz $\exists B_n$, hogy $\mu(B_n) = 0$ és $A \setminus B_n$-en T^n visszatérő. $A \ \setminus \cup_1^\infty B_n$ pontjai végtelen sokszor térnek vissza A-ba. $\square$

T2.1 bizonyítása. Legyen $N \subset A$ a nem-visszatérő pontok halmaza: $N := A \setminus (\cup_{k=1}^\infty T^{-k} A) = A \cap (\cap_{k=1}^\infty T^{-k}(M \setminus A))$.

Állítjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}_+$-ra $N \cap T^{-n} N = \emptyset$. Valóban, ha $x \in N \cap T^{-n} N$ lenne, akkor $x \in A$ és egyúttal $T^n x \in A$ lenne, így x is visszatérő volna, ellentétben N definiciójával.

Az előbbi állítás következménye: $\forall 0 \leq k < l$-re

$$T^{-k} N \cap T^{-l} N = T^{-k}(N \cap T^{-(l-k)} N) = \emptyset$$

tehát $N, T^{-1}N, \ldots, T^{-n}N, \ldots$ páronként diszjunktak, ezért μ végessége miatt $\mu(N) = 0$. $\square$

Poincaré tételének egyszerű alkalmazása: tekintsük a körvonal forgatását (P1.4). Ha $\alpha = r/s$ racionális, akkor $R_\alpha^s = \mathrm{Id}$, és minden pont periódikus. Tekintsük irracionális α esetét. T2.1-et alkalmazva az $A := (-\delta, \delta)$ halmazra, látjuk, hogy $\exists\ x \in A$ és $\exists n$, hogy $-\delta < (0 \neq)\ x + n\alpha \pmod 1 < \delta$. Tehát $-2\delta < n\alpha \pmod 1 < 2\delta$. Innen már azonnal adódik, hogy $\forall x \in S$-re a $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű S-en. (Megjegyezzük, hogy az $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű volta közvetlenül is könnyen belátható pusztán azt használva, hogy irracionális α esetén e halmaz nem lehet véges.)

Igen gyakran olyan dinamikai rendszereket vizsgálunk, ahol a fázistér topológikus struktúrával is rendelkezik; egyszerűség kedvéért ilyenkor itt mindig feltesszük, hogy M lokálisan kompakt, szeparábilis metrikus tér.

2. Definició. Legyen T endomorfizmus. Az $X \subset M$ részhalmazt *minimális*nak nevezzük, ha nem tartalmaz valódi, nem-üres, zárt, T-invariáns részhalmazt. Ha maga M minimális halmaz, akkor a T-t *minimális endomorfizmus*nak nevezzük. A T endomorfizmust *topológikusan tranzitív*nak nevezzük, ha van olyan $x \in M$ fázispont, amelynek a pályája sűrű M-ben.

Topológikusan tranzitív endomorfizmus nyilván minimális. Előbbi észrevételünk értelmében a körvonal irracionális forgatása topológikusan tranzitív, így minimális is.

Boltzmann ergodikus hipotézise és Neumann ergodtétele

Ludwig Boltzmann a múlt század 70-es éveiben a statisztikus fizika megalapozásán dolgozva megfogalmazta az un. *ergodikus hipotézist.* Legyen M_N valamely N szabadsági fokú mechanikai rendszer fázistere, és ezen $f_N : \ M_N \to \mathbb{R}$ egy mérés. Rendszerünkről tegyük fel, hogy egyensúlyban van, tehát M_N-en adva van egy μ_N (mikrokanonikus) egyensúlyi, vagyis invariáns mérték (a Liouville mérték). Boltzmann hipotézise szerint, ha rendszerünk nagy ($N >> 1$), a megfigyelések időbeli átlaga konvergál a térbeli, egyensúlyi átlagértékhez, azaz formálisan

$$1/T \int_0^T f(T^s x) ds \to \int_M f(x) d\mu(x)$$

hacsak $T, N \to \infty$. Mind a rendszer 'nagy' voltára vonatkozó feltevés, mind a használt konvergenciafogalom matematikailag tisztázatlanok voltak. Bármennyire is fontos volt és matematikailag is izgalmasnak tünt az ergodikus hipotézis, mégis csak több mint 50 év elteltével sikerült megtenni az első igazi lépéseket.

Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $f: M \to \mathbb{R}$ valamilyen 'mérés', azaz a fázistéren értelmezett, alkalmas feltételeknek eleget tevő függvény. Az ergodicitás matematikai modellezéséhez fontos lökést adott Koopman ötlete. A dinamikai rendszereket természetes módon pontleképezésekként értették, mi is így vezettük be a fogalmat. Koopman 1929-ben a következő egyszerű átfogalmazást javasolta: A pontleképezés helyett tekintsük a

$$(\hat{T}f)(x) := f(Tx)$$

– lineáris – függvénytranszformációt, mondjuk az $L_p = \{f : \|f\|_p := (\int_M (|f|^p) d\mu)^{1/p} < \infty\}$ függvénytéren. ($\hat{T}$-t a T leképezés által *indukált operátornak* nevezzük.) A μ mérték invarianciájának közvetlen folyománya, hogy $\hat{T}$ izometria, azaz $\|\hat{T}f\|_p = \|f\|_p$ és így $\|\hat{T}\|_p = 1$. Az indukált leképezés objektuma könnyen kezelhető volt a funkcionálanalitikus megközelítés számára, hiszen a funkcionálanalízis a 20-as évek végére, részben éppen Neumann János munkásságának is köszönhetően, jólértett, természetes eszközzé vált a matematikában.

2.3 Megjegyzés. *Ha egy $\hat{T} : L_p \to L_p$ izometria adott, természetes kérdés, vajon van-e olyan $T : M \to M$, amely indukálná $\hat{T}$-t. A válasz általában nem, viszont ha $(M, \mathcal{F}, \mu)$ ún. Lebesgue-tér, akkor igen. A Lebesgue-terek tanulmányozása azonban most nem célunk.*

2.4 Tétel. Neumann L_2-ergodtétele, 1932. *Tetszőleges $f \in L_2$ függvényhez létezik $\bar{f} \in L_2$ invariáns függvény, hogy*

$$\| A_n f - \bar{f} \|_2 \to 0$$

ahol $A_n f = \frac{1}{n}(f + \hat{T}f + \cdots + \hat{T}^{n-1}f)$ (Az $f \in L_p$ függvény invariáns, ha $f = \hat{T}f$.) Igaz továbbá, hogy $\bar{f}$ az f elem L_2-beli ortogonális vetülete az invariáns függvények alterére. Végül $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$.

2.5 Definició. *A T endomorfizmust ergodikusnak nevezzük, ha bármely $f \in L_2$ függvényre $\bar{f} = const$. (Miután általában az L_p-függvények csak μ-m.m. értelmezettek, azért ezek egyenlőségéről is csak ilyen értelemben beszélünk). Innen azonnal következik, hogy T csakkor ergodikus, ha minden invariáns függvény konstans.*

Ergodikus leképezésre a $T2.4$ harmadik állítása miatt $\int f d\mu = \bar{f}$, vagyis az első állítás így szól

$$\frac{1}{n}(f + \hat{T}f + \cdots + \hat{T}^{n-1}f) \xrightarrow[n \to \infty]{L_2} \int f d\mu$$

Tehát rögzített dinamikai rendszerre épp Boltzmann hipotézisének állítását nyerjük – itt L_2 konvergenciában. E megjegyzés már mutatja az ergodtételek és az ergodicitás fogalmának rendkívül fontos voltát, most térjünk rá Neumann-tételének bizonyítására.

T2.4 bizonyítása. Egyszerű lépésekben. Legyen $f \in L_2$.

1. A_n kontrakció, azaz $\| A_n f \|_2 \leq \| f \|_2$
2. Ha $A_n f$ konvergál, akkor $\bar{f} = \lim_{n\to\infty} A_n f$ invariáns, mert $\hat{T}$ folytonossága miatt

$$\hat{T}\bar{f} = \hat{T} \lim A_n f = \lim(\frac{n+1}{n} A_{n+1} f - \frac{f}{n}) = \bar{f}$$

3. Jelöljük $E := \{f \in L_2 : A_n f \text{ konvergál } L_2\text{-ben}\}$

   Tételünk fő állítása következni fog az alábbi két tulajdonságból:

   a) E zárt altér;

   b) E tartalmaz L_2-ben sűrű részhalmazt.

4. a) bizonyítására tegyük fel, hogy $f_k \in E$ és $\| f_k - f \|_2 \to 0$. Ekkor

$$\| A_n f - A_m f \|_2 \leq \| A_n(f - f_k) \|_2 + \| (A_n - A_m) f_k \|_2$$

$$+ \| (A_m(f_k - f) \|_2 \leq 2 \| f - f_k \|$$

$$+ \| (A_n - A_m) f_k \|_2$$

   A jobboldali első tag tetszőlegesen kicsivé tehető k alkalmas választásával, míg fix k-ra a második tag is tetszőleges kicsi, ha n, m elég nagyok. Megjegyezzük még, hogy $\lim_n A_n f$ folytonos $f \in E$-re, ugyanis $\| A_n f_k - A_n f \| \leq \| f_k - f \|$.

5. Bizonyítsuk b)-t. Nyilván $f = \hat{T}f$ esetén $f \in E$. Először belátjuk, hogy $(f, \hat{T}f) = \| f \|_2^2$ ekvivalens azzal, hogy $(f, \hat{T}^* f) = \| f \|_2^2$. Ekkor ugyanis $(f, \hat{T}f)$ valós, és ezért $\| f \|_2^2 = (f, \hat{T}f) = (\hat{T}f, f) = (f, \hat{T}^* f) = (\hat{T}^* f, f)$. Innen már látszik, hogy $f = \hat{T}f$ akkor és csak akkor, ha $f = \hat{T}^* f$, azaz a $\hat{T}$ és a $\hat{T}^*$ operátoroknak az 1 sajátértékhez tartozó sajátalterei megegyeznek.
6. Korlátos A operátorok jólismert, egyszerű tulajdonsága: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$-re

$$Cl[Range(A - \lambda)] \oplus Ker(A^* - \bar{\lambda}) = L_2.$$

   Innen esetünkben $(A = \hat{T},\ \lambda = 1)$ $Cl[Range(I - \hat{T})] \oplus Inv = L_2$, ahol $Inv := \{f : f = \hat{T}f\} = \{f : f = \hat{T}^* f\}$. (A felhasznált tuladonság igazolása: valóban, ha $h \perp \mathrm{R}ange(A - \lambda)$, azaz ha $\forall f = Ag - \lambda g$-re $(h, f) = 0$, akkor $\forall g \in L_2$-re $0 = (h, Ag - g) = (A^* h - \overline{\lambda} h, g)$, vagyis $h \in Ker(A^* - \overline{\lambda})$; és a gondolatsor megfordítható.)
7. b) már következni fog abból, hogy Range $(I - \hat{T}) \subset E$. Ez utóbbi állítás azonban triviális, ugyanis ha $f = g - \hat{T}g$, ekkor

$$A_n f = \frac{1}{n}(g - \hat{T}^n g) \xrightarrow[n \to \infty]{L_2} 0$$

   .
8. Az eddigiekből az is látszik, hogy $f \in Inv$-re $A_n f = f = \bar{f}$, míg $f \in$ Range $(I - \hat{T})$-re $\bar{f} = 0$. Innen adódik, hogy bármely $f \in L_2$-re $\bar{f}$ az $f \in L_2$ elem vetülete az Inv zárt altérre. E megjegyzésből a tétel második állítása nyilvánvaló.
9. A harmadik állítás belátásához tegyük fel, hogy $f = \bar{f} + (I - \hat{T})g$, ahol $\bar{f} \in Inv$, $g \in L_2$. Ekkor nyilván áll $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$. Mivel az előbbi alakú f-ek sűrű halmazt alkotnak L_2-ben, azért a kívánt egyenlőség egész L_2-n igaz. $\square$

2.6 Feladat. **L_1-ergodtétel.** *Ha T endomorfizmus, akkor $\forall f \in L_1$-re $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $\|A_n f - \bar{f}\|_1 \to 0 \ \ (n \to \infty)$ és $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$*

Utalás: L_2 sűrű altér L_1-ben.

Az átlag normában vett ergodtételek mellett igaz a m. mindenütt való konvergenciát állító un. *individuális ergodtétel* is. Ennek bizonyítását l. pl. Cornfeld-Sinai-Fomin: Ergodic Theory függeléke.

2.7 Tétel. Birkhoff(1931)-Hincsin(1933) ergodtétele. *Legyen T endomorfizmus, és $f \in L_1$. Ekkor $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $A_n f \to \bar{f}$ teljesül $\mu-$ m. m. és $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$.*

2.8 Megjegyzés. *Mindhárom ergodtétel analóg megfogalmazása igaz (i) automorfizmusra és (ii) folytonos paraméterű rendszerekre is. Automorfizmus esetén pl. T2.4 állítása mellett igaz a következő állítás is: a*

$$A_n^- f := 1/n(f + \hat{T}^{-1} f + \dots \hat{T}^{-n+1} f)$$

jelöléssel élve $\exists \bar{f}^- \in L_2$ invariáns függvény, hogy $\|A_n^- f - \bar{f}^-\|_2 \to 0$, $(n \to \infty)$, és $\bar{f}^- = \bar{f}$ áll $\mu-$ m. m.

Folytonos paraméterű rendszerekre az ergodtétel egyszerű következménye a T2.4 illetve a T2.7 tételeknek. Valóban elegendő utóbbiakat az $F(x) := \int_0^1 f(S^s x) ds$ függvényekre alkalmaznunk (a Fubini tétel miatt $f \in L_1(\mu)$-ből $F \in L_1(\mu)$ azonnal adódik).

Neumann ergodtételének kimondása után már bevezettük az ergodicitás fogalmát, és megmutattuk annak alapvető fontosságát. Most megadjuk az ergodicítás fogalmának egy egyszerű átfogalmazást.

2.9 Definici. $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ *endomorfizmus esetén az $A \in \mathcal{F}$ halmazt invariánsnak nevezzük, ha χ_A invariáns függvény.*

Az A halmaz csak akkor invariáns, ha $\mu(A \circ T^{-1} A) = 0$. Könnyű látni, hogy az invariáns halmazok σ-algebrát alkotnak, ezt $\mathcal{I}$-vel jelöljük.

2.10 Lemma. *Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus csakkor ergodikus, ha minden invariáns halmaz triviális, azaz mértéke* 0 *vagy* 1.

A lemma bizonyítása. Ergodikus T-re $\forall A \in \mathcal{I}$-re $\chi_A = \text{const}$, ami csakis akkor lehet, ha $\mu(A) = 0$ vagy 1. Tegyük fel, hogy minden invariáns halmaz triviális. Akkor az f invariáns függvényre igaz: minden $c \in \mathbb{R}$-re az $\{x: f(x) < c\}$ halmazok invariánsok lévén, mértékük 0 vagy 1. Tehát van egy c_0, hogy $\forall c < c_0$-ra az említett mérték 0, $\forall c > c_0$-ra 1. Ekkor $f = c_0$, persze μ majdnem mindenütt. $\square$

Poincaré tételének alkalmazásaként megkaptuk az $n\alpha$ ($\mod 1$) sorozat sűrű voltát irracionális α esetén. Az ergodtétel következménye lesz viszont

2.11 Tétel. Weyl tétele, 1916. *Legyen α irracionális. Ekkor $\forall I \subset S$ intervallumra $n \to \infty$ esetén*

$$1/n \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{n\alpha\}) \to \mu(I)$$

ahol μ a Lebesgue-mérték.

A tétel valójában az irracionális forgatás ergodikus voltának folyománya. Ez viszont speciális esete a tórusz feltekerésének (l. P1.10).

2.12 Feladat. *(V. Arnold) Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?*

2.13 Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.*

Utalás: $\mu(T^{-n}A \circ A) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A \circ T^{-j}A)$, ugyanis $d(A, B) := \mu(A \circ B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

Függelék

Konvergenciafajták. Véges mértéktér esetén a Hölder egyenlőtlenség miatt $1 \leq p < p'$-re $\|f\|_p \leq \|f\|_{p'}$ áll, így $L_{p'} \subset L_p$, tehát az L_p-konvergencia következik az L'_p-konvergenciából. Továbbá a majdnem mindenütt való konvergencia független az L_p-konvergenciától, hiszen egyrészt pl. $\lim_n b_n = 0$ esetén a $[0, 1]$-en értelmezett $f_n := a_n \chi_{(0,b_n)}$ függvénysorozat mindenütt tart 0-hoz, ugyanakkor $\|f_n\|_p = b_n^{1/p}|a_n|$, ami tetszőlegesen beállítható, másrészt ha

$$g_n := a_n \chi_{[\frac{k'}{2^m}, \frac{k'+1}{2^m}]}$$

ha $2^m \leq k < 2^{m+1}$ és $k' := k - 2^m$, akkor $\|g_n\|_p = |a_m| \left(\frac{1}{2^m}\right)^{1/p}$, ami már $a_m = 1$ választással is tart 0-hoz, viszont a függvénysorozat sehol sem konvergens.

Szorzattér. Legyenek $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ valószínűségi mezők. Ezek szorzata $(X, \mathcal{F}) := (X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1) \times (X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ természetes módon így vezethető be. Egyrészt $X = X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, másrészt $\mathcal{F}$ az $A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ típusú szorzathalmazok által generált $\sigma-$algebra. Végül μ $(=\mu_1 \times \mu_2)$ az egyetlen valószínűségi mérték, amelyre $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ esetén $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

Fubini tétele. Tegyük fel, hogy $\phi : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ha $\phi \in L_1(\mu)$, akkor alkalmas $A_1 \subset X_1,\ \mu(X_1 \setminus A_1) = 0$ és $A_2 \subset X_2,\ \mu_2(X_2 \setminus A_2) = 0$ részhalmazokra $\int_{X_2} \phi(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)$ illetve $\int_{X_1} \phi(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$ mérhetőek és végesek A_1-en illetve A_2-n, továbbá

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x_1, x_2)\mu(dx) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \phi(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \phi(x_1, x_2)\mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$