11. A HOMOLÓGIKUS EGYENLET MEGOLDÁSA. A KIS NEVEZŐK PROBLÉMÁJA.

Itt egy látszatra távoli kérdéssel foglalkozunk, amely mégis a KAM-tételre adott bizonyításunk kiindulópontja lesz, és emellett frappánsan mutatja a diofantoszi feltétel szerepét a kis nevezők problémájának feloldásában.

A homológikus egyenlet a következő:

$$w(x+\omega) - w(x) = h(x) \ , \tag{11.1}$$

ahol $x \in S = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ és $\frac{\omega}{2\pi}$ irracionális szám. Ennek megoldását keressük adott h esetén. Itt is az analitikus függvények körében dolgozunk, tehát feltesszük, hogy w és h 2π-periódikus komplex változós függvények, amelyek analitikusak az $|Im\ x| \leq r$ sávban ($r > 0$).

Természetes lesz a Fourier-transzformáltakat használnunk, tehát legyen

$$\begin{aligned} h_k &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(x)e^{-ikx}dx \\ w_k &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(x)e^{-ikx}dx \ . \end{aligned} \tag{11.2}$$

($k \in \mathbb{Z}$). Akkor – egyelőre formális megoldást keresve –

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum e^{ikx} h_k \\ w(x) &= \sum e^{ikx} w_k \end{aligned} \tag{11.3}$$

és

$$w_k = \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} \ , \qquad \text{ha} \quad k \neq 0 \ , \tag{11.4}$$

végül feltehető, hogy

$$w_0 = 0 \ .$$

A megoldhatóság triviális szükséges feltétele

$$h^* := h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x)dx = 0 \ .$$

Kérdés, hogy a (11.4) együtthatókkal értelmezett (11.3) Fourier-sor mikor konvergál (és oldja meg a (11.1) egyenletet). Mivel

$$|\sin x| \geq \frac{1}{2} \min_p |x - p\pi| = \frac{\pi}{2} \min_p |\frac{x}{\pi} - p|,$$

azért — a diofantoszi feltételt is használva —

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\omega}{2} \right| \geq \pi \min_p \left| \frac{k\omega}{2\pi} - p \right| \geq \pi \frac{\nu}{|k|^\mu} \ .$$

Mivel h analitikus $|Im\ x| \leq r$-ben, ezért

$$\sup_{|Im\ x| \leq r} |h(x)| = K < \infty$$

és

$$|h_k| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\pm ir}^{\pm ir + 2\pi} h(x) e^{-ikx} dx \right| = K e^{-|k|r} \ .$$

Ezért

$$|w_k| \leq K e^{-|k|r} \left(\pi \frac{\nu}{|k|^\mu} \right)^{-1} \ .$$

Tehát $\sum |w_k| < \infty$, sőt az $|Im\ x| \leq \varrho \quad (0 < \varrho < r)$ sávban

$$|w(x)| \leq \sum_{k \neq 0} \left| \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} e^{ikx} \right| \leq \sum_{k \neq 0} K e^{-|k|r} \frac{|k|^\mu}{\nu\pi} e^{|k|\varrho}$$

ahonnan $|Im\ x| \leq \varrho$-ra

$$|w(x)| \leq C_1 \frac{K}{(r - \varrho)^{\mu+1}} \ ,$$

ugyanis

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x(r-\varrho)} dx = \frac{1}{(r-\varrho)^{\mu+1}} \int_0^\infty y^\mu e^{-y} dy \ .$$

Tehát igaz a

T11.5 Tétel. **1.** *A homológikus egyenletnek - additiv konstanstól eltekintve - egyetlen folytonos megoldása lehet, ha* $\frac{\omega}{2\pi}$ *irracionális.*

2. *Ha* h *analitikus az* $|Im\ x| \le r$ *sávban,* $\int\limits_0^{2\pi} h(x)dx = 0$*, és* $\frac{\omega}{2\pi}$ *diofantoszi, akkor létezik az egyenlet* $w = Lh$ *megoldása, amelyre az* $|Im\ x| \le \varrho$ *sávban* ($0 < \varrho < r$ *esetén)*

$$|w(x)| \le C_1 \frac{K}{(r-\varrho)^{\mu+1}} \ ,$$

feltéve, hogy $\int\limits_0^{2\pi} w(x)dx = 0$ ($K = \max\limits_{|Im\ x| \le r} h(x)$).

A tétel első állítása azért következik a fentebb mondottakból, mert folytonos h függvény esetén a w_k együtthatók (11.4) által egyértelműen meghatározottak, és a kérdés csupán az, van-e egyáltalán $w(x)$ függvény ezekkel a Fourier-együtthatókkal.