10. KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER TÉTEL.

A tételt a legegyszerűbb esetre mondjuk ki és bizonyítjuk: a körgyűrű síma forgatásának kis perturbációjára.

Jelölje $A\colon= (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \times [a,b] = \{(x,y)\colon 0 \le x < 2\pi, a \le y \le b\}$ a körgyűrűt (annulust), ahol $0 < a < b$. Tekintsük ennek síma, monoton forgatását, azaz a $T_0\colon A \to A$

$$T_0(x,y)\colon= (x + \gamma(y), y)$$

leképezést, ahol $\gamma \in C^1$ és $\gamma'(y) > 0$, továbbá legyen a $T\colon A \to A$ diffeomorfizmus

$$T(x,y)\colon= (x + \gamma(y) + f(x,y), y + g(x,y))$$

ennek kis perturbációja. Feltevésünkből következik, hogy a körgyűrűt határoló körvonalak invariánsak, azaz $\forall x \in [0,2\pi]$-re $g(x,a) = g(x,b) = 0$. Az ilyen leképezéseket 'twist'-leképezéseknek nevezzük. Az egyszerűség kedvéért azonnal feltesszük, hogy $\gamma(y) = \gamma \cdot y$.

A T_0 leképezésre nézve nyilván valamennyi $S_y\colon= \{(x,y)\colon 0 \le x < 2\pi\}$, $y \in [a,b]$ körvonal invariáns, T_0 mindegyiken forgatás; S_y-n a forgatási szám (amely mindig 1-re normált, azaz a radiánban mért szög) $\frac{1}{2\pi}\gamma y$. Másszóval, a T_0 leképezés teljesen integrálható, és mindegyik S_y ún. *invariáns tórusz.* Az alapkérdés az, mi történik az invariáns tóruszoknak ezzel a "jólfésült" strukturájával a T leképezésnél, ahol f és g megfelelően kicsik?

Már Poincaré észrevette, hogy azok az invariáns tóruszok, ahol $\omega = \frac{1}{2\pi}\gamma y$ racionális (az ún. rezonáns tóruszok), eltűnnek tipikus kis perturbáció estén. Az 50-es évekig azt hitték, hogy ugyanez történik a nem-rezonáns tóruszokkal is, sőt azt is gondolták, hogy kis perturbáció már ergodikus leképezéshez is vezethet (a 20-as években Fermi adott erre – hibás – bizonyítást).

1954-ben azonban Kolmogorov észrevette, hogy ennek az ellenkezője igaz: a tóruszok többsége túléli a kis perturbációt. Nevezetesen megmutatta, hogy ez áll az *erősen nem-rezonáns* tóruszokra, vagyis amelyek ω forgatási száma eleget tesz a következő *diofantoszi feltételnek*: létezik olyan $\nu, \mu > 0$, hogy minden $p, q \in \mathbb{Z}$-re

$$|\omega q - p| \geq \frac{\nu}{|q|^{\mu}} \ . \tag{10.1}$$

A diofantoszi approximáció elméletéből ismert, elemi eredmény szerint minden irracionális ω számhoz található végtelen sok $p, q \in \mathbb{Z}$, hogy

$$|\omega q - p| < \frac{\sqrt{5}}{q}$$

teljesül. Ezért szükségképpen $\mu \geq 1$. Adott $\mu \geq 1$, $\nu > 0$-ra jelölje $\Delta_{\nu,\mu}$ a (10.1) diofantoszi feltételnek eleget tevő forgatási számok halmazát.

L10.2 Lemma. *Minden $\mu \geq 1$-re $\Delta_{\nu,\mu}$ mértéke tetszőlegesen közel van az 1-hez, ha ν elég kicsi.*

Bizonyítás. Nyilván

$$(\Delta_{\nu,\mu})^c = \bigcup_{p,q\neq 0} \left\{ \omega\colon 0 \leq \omega \leq 1 \text{ és } \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{\nu}{|q|^{\mu+1}} \right\}$$

így

$$m((\Delta_{\nu,r})^c) \leq 2 \sum_{q=1}^{\infty} (q+1) \frac{\nu}{q^{\mu+1}} \leq 4\nu \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu}}$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha $\mu > 1$ és ν elég kicsi. □ L10.2 □

Térjünk rá a KAM-tétel pontos kimondására. Itt azzal az esettel foglalkozunk, amikor f és g analitikus függvények. Feltesszük tehát, hogy az $f(x, y)$ és $g(x, y)$ komplex változós függvények 2π-periódikusak az x szög-változóban, és analitikusak a

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon |Im\ x| < r_0, y \in \mathcal{D}_1\} \ ,$$

tartományban, ahol $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{C}$ nyílt tartomány, amelyre $[a, b] \subset \mathcal{D}_1$.

Megjegyezzük, hogy az általunk tekintett leképezésekre vezethető vissza az ún. redukált 3-test probléma a körös esetben. Az n-test probléma n darab pontszerű részecske gravitációs kölcsönhatással mozgó rendszerének leírását jelenti. A 2-test probléma épp a Kepler-feladat, az egyenletek megoldhatók, a 2 test kúpszelet alakú pályákon mozog, amelyek egyik fókusza a rendszer súlypontjában van. A redukált 3-test problémában azt az esetet nézzük, amikor a 3 részecske közül az egyiknek a tömege igen kicsi és úgy tekintjük a rendszert, mint a 2-test probléma perturbáltját. Abban a speciális esetben, amikor a 2-test problémában a részecskék pályái körök, a redukált 3-test probléma a körgyűrű általunk tekintett leképezésére vezet. (Megjegyezzük, hogy a legtöbb bolygó Nap körüli pályái nem nagyon térnek el a körpályáktól.)

Hamilton-rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy rendelkezik síma invariáns mértékkel, ez a jólismert Liouville-mérték. Ennek szellemében a körgyűrű diffeomorfizmusai esetén feltehetnénk, hogy ez a Lebesgue-mérték, a terület. Ennél azonban gyengébb hipotézist fogadunk el, ez az ún.

F10.3 Metszet-feltétel. *Tekintsük $\forall y \in [a,b]$-re az S_y körvonal $T\,S_y := \{T(x,y) : x \in [0,2\pi)\}$ képét. Feltesszük, hogy $\forall y \in [a,b]$-re*

$$T\ S_y \cap S_y \neq \emptyset\ .$$

T10.4 Tétel (KAM-tétel). *Tegyük fel, hogy $T : A \to A$ (ahol $b-a=1$)*

$$T(x,y) := (x + \gamma y + f(x,y), y + g(x,y)) \tag{10.5}$$

a körgyűrű twist-diffeomorfizmusa, amely eleget tesz a metszet-feltételnek. Tegyük fel továbbá, hogy az x-ben 2π- periódikus $f(x,y), g(x,y)$ komplex változós függvények analitikusak a $\mathcal{D}$ tartományban. Akkor $\forall\gamma \leq 1$-re, $\forall\mathcal{D}$-re és $\forall\varepsilon > 0$-ra, továbbá $\forall\mu > 1$-re és $\forall\nu > 0$-ra létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \mathcal{D}, \nu, \mu)$, hogy ha $\forall x, y \in \mathcal{D}$-re

$$|f| + |g| < \gamma \cdot \delta \tag{10.6}$$

akkor minden $\omega/2\pi \in \Delta_{\nu,\mu} \cap (1/2\pi[a+\varepsilon, b-\varepsilon])$-re van T-nek olyan

$$\zeta := \zeta(\xi) := (\xi + u(\xi), v(\xi)) \tag{10.7}$$

invariáns görbéje, ahol u és v 2π*-periódikus,* $|Im\xi| < \frac{r_0}{2}$*-ben analitikus függvények. A* ξ *paraméter megválasztható úgy, hogy* $(T\zeta)(\xi) = \zeta(\xi + \omega)$*, továbbá*

$$|u| + |v - \gamma^{-1}\omega| < \varepsilon \ . \tag{10.8}$$

Megjegyzések. 1. Tételünkben a megengedhető perturbációnak pusztán a γ-tól való függése látszik. A módszer javításával azt is bebizonyították, hogy $\forall\gamma \le 1$-re, $\forall\mathcal{D}$-re, $\forall\varepsilon > 0$-ra, továbbá $\forall\mu > 1$-re és $\forall\nu > 0$-ra létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \mathcal{D}, \mu)$, hogy ha $\forall x, y \in \mathcal{D}$-re

$$|f|, |g| < \gamma\delta\nu^2$$

akkor igaz a tétel állítása. Sőt, az invariáns tóruszok ω-tól Lipschitz-folytonosan függenek, és a fázistérnek legalább $1 - O(\nu)$ mértékű részhalmazát alkotják.

2. Tételünk állítása közvetlenül kiterjeszthető többdimenziós Hamilton rendszerek esetére. A diofantoszi feltétel ez esetben: $\exists\nu > 0$ és $\exists\mu > 0$ konstansok, hogy $\forall k \in \mathbb{Z}^n, k \ne 0$-ra

$$|(k, \omega)| \ge \frac{\nu}{|k|^\mu}$$

ahhol $|k|:= |k_1| + \ldots |k_n|$, $\omega:= (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, és n a rendszer szabadsági fokainak száma.

3. Fontos megjegyzés, hogy $\mu < 1$ esetén $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$. Ugyanis nyilván

$$\inf_{p,q\in\mathbb{Z}} |q||\omega q - p| \le \inf_{Q\in\mathbb{Z}_+} \min_{0\le q\le Q} \min_{p\in\mathbb{Z}} q|\omega q - p| \le \inf_{Q\in\mathbb{Z}_+} Q \min_{0\le q\le Q} \min_{p\in\mathbb{Z}} |\omega q - p|$$

viszont a skatulya-elv folytán

$$\min_{0\le q\le Q} \min_{p\in\mathbb{Z}} |\omega q - p| \le \frac{1}{Q} \ .$$

Tehát $\Delta_{\nu,1} = \emptyset$ ha $\nu \ge 1$, amiből természetesen $\mu < 1$-re $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$ is adódik.

Függelék

Analitikus függvények. Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ a komplex sík egyenesen összefüggő, nyílt tartománya. Az $f: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ függvényről azt mondjuk, hogy analitikus a $\mathcal{D}$

tartományban, ha $\mathcal{D}$ minden pontjában differenciálható. Akkor az is igaz, hogy minden $z \in \mathcal{D}$ elég kis környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető.

Ha $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, akkor az $f: I \to \mathbb{R}$ függvényt valós analitikusnak mondjuk, ha $\forall x \in I$-re x alkalmas környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető. Ez esetben létezik olyan $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $I \subset \mathcal{D}$ egyszeresen összefüggő, nyílt tartomány és $f_1: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, hogy f_1 analitikus és $f_1|I = f$.

Cauchy-féle integráltétel. Ha f analitikus a $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ egyenesen összefüggő nyílt tartományban, akkor bármely a $\mathcal{D}$-ben fekvő zárt Γ út mentén integrálva

$$\oint f(z)dz = 0 \ .$$

Fourier transzformált. Ha az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódikus függvény integrálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor Fourier együtthatói

$$f_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az f formális Fourier sora

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}.$$