2005/2/25

SZ. D.: DINAMIKAI RENDSZEREK
1. BEVEZETÉS. ALAPFOGALMAK ÉS PÉLDÁK.

Ebben az előadásban dinamikai rendszeren időben *determinisztikusan* fejlődő — diszkrét vagy folytonos idejű — rendszert értünk.

1.1 Definició. *Legyen* $(M, \mathcal{F})$ *mérhető tér, azaz* M *az alaphalmaz, dinamikai rendszerünk fázistere, és* $\mathcal{F}$ M *részhalmazainak* $\sigma-$*algebrája. Az* $(M, \mathcal{F}, T)$ *hármast, ahol* $T : M \to M$*, endomorfizmusnak nevezzük, ha* T *mérhető, azaz* $\forall A \in \mathcal{F}$*-re* $T^{-1}A \in \mathcal{F}$*.*

1.2 Definició. *Az* $(M, \mathcal{F}, T)$ *hármast, ahol* $T : M \to M$ *automorfizmusnak nevezzük, ha* T *és* T^{-1} *is endomorfizmusok.*

Klasszikus példa dinamikai rendszerre a Naprendszer, amelynek mozgását a tudósok *stabilnak* tekintették. (Tekintsük valamely dinamikai rendszer két adott, infinitézimálisan közeli fázispontjához tartozó pályákat. Attól függően, hogy az időbeli fejlődés során a pályák távolsága — tipikus pályapár esetén — legfeljebb polinomiálisan illetve legalább (pozitiv) exponenciálisan vátozik, a rendszert *stabilisnak* illetve *instabilnak* nevezzük.) Megoldani, integrálni azonban csak a két-test problémát sikerült, a három-test problémát azonban nem. Sőt a könnyített változat, az un. korlátozott három-test probléma is hosszú ideig ellenállt. A *korlátozott három-test problémánál* feltesszük, hogy a három tömegpont közül az egyik tömege elenyészően kicsi; ekkor reális volt a remény, hogy a megoldást megkaphatjuk mint a két-test probléma ismert megoldásának perturbációját.

A közelítés ésszerűségét szemléltethetjük a Vénusz pályájának számolásával. A Vénusz mozgását elsősorban a Nap gravitációs vonzása határozza meg, de csekély hatást a többi bolygó is gyakorol rá. A Nap körüli ellipszispályát elsősorban a

Jupiter deformálja, azonban ennek átlagos ereje is kisebb mint a Napénak 2.10^{-5}-szerese. Elsőrendű közelítésben még ezt kell figyelembevennünk, ez éppen a korlátozott három-test-probléma. Finomabb közelítésben azután már a Föld vonzerejével is számolnunk kellene, ez átlagosan a Napénak 4.10^{-6}-szorosa.

Szóval mi is a helyzet a korlátozott három-test-problémánál az általános esetben? A válasz jóval bonyolultabbnak bizonyult a vártnál, amit a három-test problémánál egyszerűbb, de vele rokon példán szemléltetünk.

1.3 Példa: A körgyűrű forgatása.

Tekintsük az $M = [a, b] \times S$ fázistéren a $T(r, \phi) := (r, \phi + f(r))$ automorfizmust, ahol $0 < a < b$ és $f(r)$ szigorúan monoton növekedő C^1 függvény. (Mivel $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, azért az (r, ϕ) polárkoordináta szög-változójában az összeadás *mod 1* értelemben szerepel.) Ennek minden $r \in [a, b]$ értékre az $r = const.$ görbe invariáns görbéje (következésképpen a fázistér 'fóliázva' van ezekkel), a rendszer stabil. Az $r = const.$ invariáns görbéket *invariáns tóruszoknak* is nevezik; topológiailag ezek egydimenziós tóruszok.

1.4 Példa: A körvonal forgatása.

Az előző példa rögtön egy egyszerűbbet is tartalmaz. Tekintsük az $M = S$ körvonalon az $R_\alpha x = x + \alpha$ automorfizmust (ismét *mod 1*). Ezt nevezik a *körvonal forgatásának*, és α a forgatási szög. Könnyű látni, hogy racionális α esetén minden pont periodikus, irracionális α esetén minden pálya sűrű (ezt a 2. előadásban bizonyítjuk is).

1.5 Példa: A körgyűrű diffeomorfizmusa.

Visszatérve az 1.3 Példához, a kérdés az, mi történik, ha T helyett a $T_\epsilon := T_\epsilon(r, \phi) := (r + \epsilon\alpha(r, \phi), \phi + f(r) + \epsilon\beta(r, \phi)$ perturbált leképezést vesszük, ahol α és β síma függvények, amelyekkel T_ϵ az M körgyűrű diffeomorfizmusa (azaz az inverz is létezik és differenciálható).

A T_ϵ leképezések tehát a *körgyűrű (az annulus) diffeomorfizmusai* közé tartoznak. Vajon ezeknek is lesznek-e — legalábbis kis ϵ-ra — T-hez hasonlóan M minden pontján keresztül invariáns tóruszai? A válasz, amelyet 1954-ben A. N.

Kolmogorov talált, a korábbi várakozáshoz képest rendkivül meglepő volt. A perturbált leképezéseknek valóban megmaradnak bizonyos invariáns tóruszai abban az értelemben, hogy

(1) lesznek invariáns Γ görbék, amelyek topológiailag tóruszok,

(2) továbbá az ezekre korlátozott leképezésnek az un. *forgatási száma* (ez a forgatási szög általánosítása, a pontos definiciót l. később) azonos a T automorfizmus valamely $r = r(\Gamma)$ sugárhoz tartozó $f(r)$ forgatási szögével :

(3) végül T és T_ϵ azonos forgatási számhoz tartozó invariáns tóruszai egymás alkalmas perturbáltjai.

Mármost, hogy milyen $f(r)$ forgatási szögekhez tartozó invariáns tóruszok maradnak meg, az a szög *számelméleti* tulajdonságaitól függ: minél rosszabbul közelíthető $f(r)$ racionálisokkal, annál nagyobb perturbációnak is ellenáll. Először számítógépes eredmények mutatták, hogy Kolmogorov eredménye az igazságot mutatja abban az értelemben, hogy általában a perturbációnál megmaradó invariáns tóruszok közötti tartományokban tipikusan olyan *kaotikus*, instabil pályák is előfordulnak, amelyek lezártjai pozitiv mértékű halmazok. Kolmogorov óriási érdeme a szokatlan, egészen új jelenség észrevétele, és a bizonyítás alapgondolatának megtalálása. Az analitikus, igen nehéz részletek teljes és matematikailag szigorú kidolgozása, és a feltételek lényeges javítása Arnold(1963) és Moser(1962) eredménye, ezért nevezik az elméletet Kolmogorov-Arnold-Moser, röviden KAM-elméletnek. A későbbiekben egy már egyszerűsített bizonyítást ismertetünk.

A számunkra legérdekesebb dinamikai rendszerek közül soknak a matematikai megközelítés számára igen előnyös további tulajdonsága is van: M-en megadható olyan, gyakran az M topológikus tulajdonságaival összhangban levő *mérték*, amelyet a dinamika *invariáns*an hagy. Ez a helyzet pl. a klasszikus mechanika Hamilton-rendszereinél, ahol az un. Liouville-mérték mindig invariáns az időbeli fejlődésre vonatkozólag.

1.6 Definició. *Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, és rajta adott a μ mérték, amelyet az 1.1 definició értelmében vett T endomorfizmus invariánsan hagy (azaz: $\forall A \in \mathcal{F}$-re*

$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$). Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ négyest ugyancsak endomorfizmusnak nevezzük. A szövegösszefüggésből ki fog mindig derülni, vajon van-e invariáns mérték, avagy nincs, pontosabban gondolunk-e rá avagy nem. Ugyancsak, ha ezt külön nem említjük, a μ mértékről feltesszük, hogy valószínűségi mérték, azaz $\mu(M) = 1$.

1.7 Definició. *Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ négyest automorfizmusnak nevezzük, ha T és T^{-1} is endomorfizmusok.*

Az 1.3 és 1.4 példákban a Lebesgue-mérték invariáns, mig az 1.5 példában tipikusan nincs síma invariáns mérték.

1.8 Példa, Gauss-leképezés.

Tekintsük az $I := [0, 1)$ egységintervallum következő transzformációját:

$$Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

ahol $\{x\} = x - [x]$ az x szám törtrésze. Ez a leképezés nemcsak az 1.1 definició értelmében endomorfizmus, hanem következő lemmánk szerint az 1.6 definició értelmében is.

1.9 Lemma. *A Gauss-leképezésnek van síma invariáns mértéke, amelynek sűrűségfüggvénye*

$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2}$$

Bizonyítás: Ha van invariáns mérték, akkor az $(y, y + dy)$ intervallum mértéke egyrészt $\rho(y)\ dy$, másrészt

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \rho(x_k)\ |dx_k| = \Sigma_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2\ dy$$

ahol $x_k :=\ (k + y)^{-1} :\ 1 \leq k$ az $y = Tx$ egyenlet megoldásai. Innen

$$\rho(y) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \rho \left(\frac{1}{k+y} \right) \frac{1}{(k+y)^2}$$

Elemi számolás már adja, hogy a lemmában szereplő sűrűség megoldja a kapott függvényegyenletet. $\square$

A Gauss leképezés alapvető szerepet játszik a lánctörtek metrikus elméletében.

1.10 Példa. Intervallumleképezések.

Az 1.7 példa sugallja a következő leképezéscsalád bevezetését. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^1-függvény, amelyre a $Tx := \{f(x)\}$ módon értelmezett $T : [0,1] \to [0,1]$ endomorfizmus végesen invertálható (azaz $\forall y \in [0,1]$-re a $Tx = y$ egyenletnek véges sok megoldása van). Az így bevezetett leképezéseket nevezzük *intervallum-leképezéseknek*. Mivel a lehető legalacsonyabb-dimenziósak, ezért — matematikai vagy akár számítógépes — tanulmányozásuk viszonylag egyszerűbb, ugyanakkor már ezek is rendkívül gazdag viselkedést mutatnak. Sőt ugyanez elmondható a még egyszerűbb $f(x) := \mu x(1-x)$ $(\mu > 0)$ kvadratikus függvény által definiált családra. Később látni fogjuk, hogy ezen leképezések akkor viselkednek ergodikus, kaotikus, sztochasztikus módon, ha létezik síma invariáns mértékük. A Gauss leképezésnél leírt módon itt is könnyű felírni az esetleg létező invariáns mérték $\rho(y)$ sűrűségfüggvényére az egyenletet. Nevezetesen:

$$\rho(y) = \Sigma_{x:\ Tx=y} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}$$

A jobboldali operátort (itt nem mondtuk meg, milyen térben értelmeztük) nevezik *Perron-Frobenius-Ruelle-operátornak*, és ennek fixpontja a keresett sűrűség.

A valószínűségszámításból jólismert az $f : [0,1) \to [0,1),\ \ f(x) = 2x \pmod 1$ függvény által definiált un. *bináris-* (vagy *diadikus-*) leképezés. Igen fontosak a szakaszonként C^1 f-függvények által értelmezett intervallumleképezések is.

Csak említjük a kétdimenziós analitikus leképezéseket, amelyek, ha lehet, még az intervallumleképezéseknél is gazdagabb viselkedést mutatnak. Egyszerű példa itt is a kvadratikus család: $Tz := z^2 + c$ ahol $c \in \mathbb{C}$ (nyilván $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

További fontos példákkal a következő fejezetekben is megismerkedünk.

Mese a Naprendszerre vonatkozó legújabb szimulációkról.

Az 1994-es párizsi Matematikai Fizikai Világkongresszuson J. Laskar francia kutató meglepő eredményekről számolt be. Lényeges állítása, hogy a Naprendszer jövőbeli fejlődését 100 millió évre előre tudják számolni, és ez egyben elvi korlát is. Igen érdekes elvi újdonság, hogy a stabilnak hitt rendszerben kaotikus oszcillációk is megjelennek. Nevezetesen pl. a Mars forgástengelyének iránya végez ilyet. Ez természetesen az időjárásra is hat, ami erősen csökkenti az élet kialakulásának esélyeit. Ugyanezt a kaotikus oszcillációt mutatta a Föld forgástengelye is, amikor a rendszerből kihagyták a Föld holdját. Ez arra utal, hogy a Föld mozgásának stabilitása, beleértve a Föld forgástengelyének szabályos változását, annak következménye, hogy Földünk viszonylag nehéz Holddal rendelkezik.

Folytonos paraméterű dinamikai rendszerek.

Differenciálegyenletekből származtatott dinamikai rendszereknél az idő folytonos. Ezért természetes az egyparaméteres leképezés(fél)csoportok bevezetése.

1.11 Definició. *Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}})$ egyparaméteres automorfizmuscsoport, azaz legyen $\forall t \in \mathbb{R}$-re T^t automorfizmus, és teljesüljön $\forall t, s \in \mathbb{R}$ és $x \in M$-re: $T^{t+s}x = T^t(t^s x)$. $T^{\mathbb{R}}$ folyam, ha $\forall f : M \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre $f(T^t x)$ mérhető $M \times \mathbb{R}$-en.*

Az előző definicióban az $\mathbb{R}$ paramétertartományt $\mathbb{R}_+$-szal helyettesítve az értelemszerű vátoztatásokkal kapjuk a $T^{\mathbb{R}_+}$ endomorfizmus-félcsoport, másnéven fél-folyam fogalmát.

1.12 Példa. A tórusz feltekerése

Ez a körvonal forgatásának általánosítása. Itt $M := S^d \simeq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, μ a Lebesgue-mérték, és

$$T^t_\alpha x := \ x + t\alpha \qquad\qquad (mod S^d)$$

ahol $\alpha \in S^d$ tetszőleges.

Ugyanezt a transzformációt tekinthetjük csak diszkrét időpontokban

$$T^n_\alpha := x + n\alpha \qquad\qquad (mod S^d) \tag{1.13}$$

Ez a *tórusz eltolása*, ami általában a csoport-eltolás speciális esete (l. P3.9).

Ha lehetséges, mindig érdemes egyszerű mechanikai példákon keresztül szemléltetnünk a bevezetett matematikai modellek jelentését, jelentőségét.

1.14 Példa. Az inga fázisképe.

Tekintsünk egy ℓ hosszúságú fonálra felfüggesztett $m = 1$ tömegű pontszerű tömeget. Jelöljük q-val az inga kitérésének szögét, p-vel momentumát, ami az adott esetben egyben sebessége is. Egyszerű elvekből következően

$$\left[\begin{array}{l}\dot{q} = p \\ \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin q\end{array}\right. \tag{1.15}$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Rendszerünk, amely így is írható:

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0$$

Hamilton-rendszer, és Hamilton-függvénye

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2.$$

Valóban

$$\left[\begin{array}{l}\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q},\end{array}\right.$$

és így

$$\frac{dH(p,q)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = 0$$

miatt $H = H(p(t), q(t))$ mozgásállandó. Tehát az (1.15) egyenlet megoldásai a $H =$ constans görbék mentén változnak. Emellett a q szögváltozó 2π-periódikus, így a fázistér a $(-\infty < p < \infty, 0 \leq q < 2\pi)$ hengerpalásttal azonosítható.

Az (1.15) rendszernek két fixpontja, azaz szinguláris pontja van, vagyis ahol $p = 0$; ezek $(p_1 = 0, q_1 = 0)$, $(p_2 = 0, q_2 = \pi)$ (az első az inga legalsó, a másik a legfelső helyzete). Mindkét fixpont környezetében tekinthetjük e rendszer lineáris közelítését. Ezek

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -\omega^2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = D_1\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & \omega^2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = D_2\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

D_1 sajátértékei: $\lambda_1 = \pm i\omega$, D_2-éi: $\lambda_2 = \pm\omega$.

Az első esetben a linearizált egyenlet valós megoldásai $p(t) = C\omega\cos(\omega t + \varphi)$, $q(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$, ezek ellipsziseken változnak ($\frac{1}{\omega^2}p^2 + q^2 = C^2$), a második esetben $p(t) = C\omega ch(\omega t + \varphi)$, $q(t) = Csh(\omega t + \varphi)$; ezek viszont hiperbolákon változnak ($\frac{1}{\omega^2}p^2 - q^2 = C^2$).

A lineáris közelítések azonban csak a fixpontok közelében írják le jól a pályákat, globálisan így néz ki a fázikép:

á b r a

Valóban, a $H = H(p,q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2$ energia konstans lévén, $H > 2\omega^2$ esetén a mozgás forgás jellegű, p sehol sem lehet nulla, q monoton módon változik; $0 < H < 2\omega^2$ esetén ($p = 0$, $q = \arccos(1 - \frac{H}{\omega^2})$) pontja az orbitnak, a mozgás lengő jellegű.

$H = 2\omega^2$ esetén a megoldás a $\frac{p^2}{2} = \omega^2(1 + cos\varphi)$ görbepáron, az ún. szeparatrixon változik. A $(0,0)$ fixpont elliptikus, a $(0,\pi)$ fixpont hiperbolikus, a szeparatrix $(\pi, 0)$-beli érintői épp az (1.16)-ban szereplő D_2 lineáris operátor sajátirányai.

Függelék.

Mérhető tér, valószínűségi mező. Ha M tetszőleges nem-üres halmaz, akkor M részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családját $\sigma-algebrának$ nevezzük, ha (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (ii) minden $A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ esetén $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, és végül (iii) ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $A^c \in \mathcal{F}$ (másszóval $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható egyesítés és a komplementerképzés műveleteire nézve). A $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ függvényt *mértéknek* nevezzük, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ esetén $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. A μ mérték *valószínűségi*, ha $\mu(M) = 1$. Az $(M, \mathcal{F})$ pár neve *mérhető tér*, az $(M, \mathcal{F}, \mu)$ hármasé *mértékes tér* (illetve *valószínűségi mező*, ha μ valószínűségi mérték. Nem jelentős megszorítás, ezért a továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy a szereplő *mértékek teljesek*, azaz ha $B \subset A$, és $\mu(A) = 0$, akkor egyúttal $B \in \mathcal{F}$ (és következőleg $\mu(B) = 0$). Ha M topológikus tér (pl. metrikus tér, vagy speciálisan az euklideszi tér), akkor a nyílt halmazok által generált σ-algebra az ún. *Borel σ-algebra.* Ha – Riemann-sokaságok, így pl. ismét az euklideszi tér esetén – az alapul vett mérték a Riemann-mérték, illetve a Lebesgue-mérték — akkor a szóbanforgó mértéknek egyetlen legszűkebb teljes kiterjesztése van (az euklideszi esetben a megfelelő σ-algebrát a *Lebesgue σ-algebrának* és az ott értelmezett mértéket pedig *Lebesgue-mértéknek* nevezzük).

Integrálhelyettesítés. A Perron-Frobenius-Ruelle operátor levezetésénél már használtuk és a jövőben is sokszor alkalmazzuk az alapvető integrálhelyettesítési azonosságot. Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu)$ valószínűségi mező, $(M', \mathcal{F}')$ mérhető tér, $f : M \to M'$ mérhető leképezés és $\phi : M' \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Akkor

$$\int_M \phi(f(x))\mu(dx) = \int_{M'} \phi(y)\mu(f^{-1}(dy)) \tag{1.17}$$

áll, valahányszor bármelyik oldalon szereplő integrál létezik.