

Modellelmélet Feladatok, 3.

1. Színezzük a Rado-gráf csúcsait pirossal és kékkel tetszőleges módon. Igazoljuk, hogy ekkor vagy az összes piros csúcs által feszített részgráf, vagy az összes kék csúcs által feszített részgráf (vagy mindkettő) izomorf lesz a Rado-gráffal.
2. Legyen T egy \aleph_0 -kategorikus elmélet egy olyan nyelven, melyben csak relációszim-bólumok vannak, és legyen \mathcal{A} (az izomorfizmus erejéig egyértelmű) megszámlálhatóan végtelen modellje T -nek. Igazoljuk, hogy ha \mathcal{B} olyan megszámlálható struktúra, melynek minden véges része beágyazható \mathcal{A} -ba, akkor \mathcal{B} is beágyazható \mathcal{A} -ba (azt nem tettük fel, hogy $\mathcal{B} \models T$).
3. Legyen T teljes elmélet, és legyen $\mathcal{A} \models T$ megszámlálhatóan végtelen struktúra. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.
 - (1) \mathcal{A} atomos;
 - (2) \mathcal{A} elemien beágyazható T minden megszámlálhatóan végtelen modelljébe.
4. Legyen A megszámlálhatóan végtelen halmaz. Adjunk meg végtelen sok oligomorf permutációcsoportot A -n, melyek, mint csoportok, páronként nem izomorfak.
5. Legyen \mathcal{A} megszámlálhatóan végtelen struktúra. Igazoljuk, hogy $\text{Aut}(\mathcal{A})$ (a pontonkénti konvergencia szerint) zárt részcsoportha $\text{Sym}(A)$ -nak (ahol A az \mathcal{A} alaphalmaza és $\text{Sym}(A)$ az A összes permutációinak csoportja).
6. Legyen $\mathcal{A} = \langle A, E_n \rangle_{n \in \omega}$ olyan struktúra, hogy $|A| = \aleph_0$, minden $n \in \omega$ -ra E_n olyan ekvivalencia-reláció, melynek végtelen sok ekvivalencia-osztálya van, és mindegyik ekvivalencia-osztálya végtelen, továbbá $E_{n+1} \subseteq E_n$ és E_n mindegyik ekvivalencia-osztálya E_{n+1} végtelen sok ekvivalencia-osztályának uniója. Igazoljuk, hogy $\text{Th}(\mathcal{A})$ stabil.

2025 Május.