

**(A) Ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek.**

1. Altérre való merőleges vetület létezése, egyértelműsége, Adott  $\underline{u}$  vektor merőleges vetülete a  $V$  altérre van  $V$ -ben legközelebb  $\underline{u}$ -hoz.
2.  $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$  optimális közelítő megoldása  $A\underline{x} = \underline{b}$ -nek  $\iff \underline{x}^*$  megoldása a normálegyenletnek.
3.  $A\underline{x} = \underline{b}$  normálegyenlének megoldásai közül pontosan egy esik  $A$  sorterébe és ennek a megoldásnak a legkisebb a hossza.
4. Ha  $A$  teljes oszloprangú, akkor az  $A$  oszlopterére vett ortogonális projekció mátrixa  $A(A^T A)^{-1} A^T$ .
5. Pszeudo-inverz definíciója fogalma és linearitása, Moore-Penrose inverz.
6. Minden  $A$ -hoz pontosan egy  $X$ -van, amely kielégíti a Moore-Penrose axiómákat ( $AXA = A$ ,  $XAX = X$ ,  $(AX)^T = AX$ ,  $(XA)^T = XA$ ).

**(B) Direkt összeg, Direkt szorzat**

1. Altérrek összege, direkt összege. Ekvivalensek:
  - (a)  $V$  az  $(U_i, i \in I)$  altereinek direkt összege,
  - (b)  $(\forall i \in I)(\forall B_i \subseteq U_i \text{ bázis})(\cup_i (B_i \text{ bázisa } V\text{-nek}),$
  - (c)  $(\forall i \in I)(\exists B_i \subseteq U_i \text{ bázis})(\cup_i (B_i \text{ bázisa } V - \text{nek}).$
2. Altérmenti vetítések definíciója. Ekvivalensek:
  - (a)  $f$  altérre vetítés,
  - (b) van  $B$  bázis, hogy  $[f]_B$  bal felső része egységmátrix, a többi blokk 0,
  - (c) van olyan  $B$  bázis, melyben  $[f]_B$  idempotens,
  - (d) minden  $B$  bázisban  $[f]_B$  idempotens.
3. Direktszorzat Definíciója. Ha  $I$  véges, akkor  $I$  darab altér direkt összege és direkt szorzata izomorf. Ha  $I$  végtelen, akkor nem.

**(C) Sajátérték, sajátvektor.**

1. Invariáns altérrek definíciója. Ha  $V$  véges dimenziós,  $f : V \rightarrow V$  lineáris és  $V$  felbontható  $f$  invariáns altereinek direkt összegére, akkor van olyan  $B$  bázis, melyben  $[f]_B$  blokkdiagonális.
2. Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai, kiszámolásának módja.
3. Ekvivalensek:
  - (a) Az  $A$  mátrix diagonalizálható.
  - (b) Van bázis  $A$  sajátvektoraiból.
  - (c) A tér felbontható  $A$  1-dimenziós invariáns altereinek direkt összegére.
4. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja azonos. Mátrix karakterisztikus polinomjának, nyomának és determinánsának kapcsolata.
5. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek
6. Algebrai és geometriai dimenzió, a geometriai legfeljebb akkora, mint az algebrai.
7. Spektrálfelbontás: egzisztencia és 2 mód a spektrálfelbontás kiszámítására.
8. Gersgorin-körök, és a rájuk vonatkozó tétel.

**(D) Jordan-féle normálalak.**

1. Minimálpolinomok, létezésük, egyértelműségük, jellemzésük az oszthatósággal. A minimálpolinom invariáns hasonlóságra.
2. Ha az  $A, B$  mátrixok kommutálnak, akkor  $B$  kommutál  $A$  polinomjaival,  $A$  polinomjai kommutálnak egymással, tetszőleges  $f$  polinomra  $\ker(f(A))$  invariáns altér  $A$ -nak.

3. A Dekompozíciós Tétel: ha  $\varphi$  minimálpolinomja  $m = g_1 g_2$ ,  $g_1$  és  $g_2$  relatív prímek, akkor  $U_1 = \ker(g_1(\varphi))$  és  $U_2 = \ker(g_2(\varphi))$ -vel a tér  $U_1$  és  $U_2$  direkt összege.  $\varphi|_{U_1}$  és  $\varphi|_{U_2}$  minimálpolinomjai.
4. Az  $A$  mátrix minden sajátértéke gyöke  $A$  minimálpolinomjának.
5. Test feletti polinomelemű mátrixok gyűrűje és a mátrixegyütthetős polinomok gyűrűje izomorf.
6. A jobbról behelyettesítés összegtartó, és szorzattartó, ha a behelyettesített mátrix kommutál a jobboldali tényező mátrixegyütthetősivel. A Hamilton-Cayley tétel tetszőleges test felett.
7. Nilpotens mátrixok. Jordan-láncok és Jordan-bázisok. A következő állításokra  $(b) \Rightarrow (c)$  és  $(c) \Rightarrow (a)$ .
  - (a)  $\varphi$  nilpotens.
  - (b) Van  $\varphi$  diszjunkt Jordan-láncaiból álló bázis.
  - (c) Van olyan  $B$  bázis, melyben  $\varphi$  mátrixa olyan Jordan-normálalakú, melyben minden Jordan-blokk 0-hoz tartozik.
8. az előző állításokra  $(a) \Rightarrow (b)$ .
9. Jordan-féle normálalak létezése és egyértelműsége  $\mathbb{C}$  felett.
10. Jordan-féle normálalak  $\mathbb{R}$  felett ( $(2 \times 2)$ -es blokkos, csak az egzisztencia kell).
11.  $\mathbb{C}$  felett adott sajátértékhez tartozó Jordan-blokkok összmérete, maximális mérete, száma leolvasható a karakterisztikus polinomból és a minimálpolinomból.

**(E) Euklideszi terek, bilineáris és kvadratikus formák.**

1. Bilineáris függvények és Gram-mátrixaik. A bilineáris függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha Gram-mátrixa szimmetrikus. Euklideszi terek, a skaláris szorzat által indukált norma.
2. Ortogonális és ortonormált vektorrendszerek. Ha egy ortogonális vektorrendszer nem tartalmazza a nullvektort, akkor lineárisan független.
3. Fourier-együttatók, kapcsolat a merőleges vetítéssel, Gram-Schmidt ortogonalizáció.
4. Véges dimenziós euklideszi tér mindig izomorf egy olyan euklideszi térrel, melyben a skaláris szorzás sztenderd. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség véges dimenziós absztrakt euklideszi terekben.
5. Ortogonális mátrixok és első jellemzésük: Ekvivalensek:
  - (a)  $Q$  ortogonális.
  - (b)  $Q^{-1} = Q^T$ .
  - (c)  $Q$  sorai ortonormált rendszert alkotnak.
6. Normált és metrikus terek rövid definíciói (kizárólag a norma-axiómák és a metrika-axiómák kellenek). Az ortogonális leképezések/mátrixok második jellemzése Ekvivalensek:
  - (a)  $\varphi$  mátrixa a sztenderd bázisban ortogonális.
  - (b)  $\varphi$  skaláris-szorzat tartó.
  - (c)  $\varphi$  távolság-tartó (izometria).
  - (d)  $\varphi$  hossz-tartó.
  - (e)  $\varphi$  ortonormált rendszereket ortonormált rendszerekbe viszi.
  - (f)  $\varphi$  mátrixa minden ortonormált rendszerben ortogonális.
7. Ha egy (végtelen dimenziós) Euklideszi térben  $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$  olyan  $ONR$ , hogy  $\text{span}(B)$  sűrű, akkor tetszőleges  $v$  vektor  $\text{span}\{b_i : i < n\}$ -re vett merőleges vetületei az indukált normában visszakonvergálnak  $v$ -hez.
8. Szimmetrikus valós mátrix minden sajátértéke valós és különböző sajátalterei merőlegesek egymásra.

9. Valós főtengety-tétel: Legyen  $A$  valós mátrix. Ekvivalensek:
  - (a)  $A$  szimmetrikus.
  - (b)  $A$  ortogonálisan diagonalizálható.
10. Kvadratikus alakok és homogén másodfokú polinomok. Kvadratikus alakok mátrixainak változása báziscserénél. Kongruens mátrixok. Minden kvadratikus alak ortogonális mátrixal négyzetösszegé alakítható.
11. Kongruens mátrixok jellegei azonosak. Szimmetrikus mátrixok jellegének (poz./neg. definit/szemidefinit, indefinit) jellemzése sajátértékeik előjeleivel. Bizonyítás nélkül: szimmetrikus mátrixok jellegének jellemzése főminoráik (bal felső sarokaldeterminánsaik) előjeleivel.

**(F) Szinguláris érték szerinti felbontás.**

1. Szinguláris érték szerinti felbontás, módszer a kiszámolásra.
2. Givens-forgatások, és mátrixaik, ezek mind ortogonálisak.  $QR$ -felbontás és minden pozitív determinánsú ortogonális mátrix Givens-forgatásokkal diagonalizálható. Minden pozitív determinánsú ortogonális mátrix Givens-forgatások szorzata.
3. Moore-Penrose inverz előállítás SVD felbontásból: ha  $A = U\Sigma V^T$ , akkor  $A^+ = V\Sigma^+U^T$ . Bizonyítás nélkül: az Eckart-Young-tétel.

**(G) Mátrixfüggvények.**

1. Normák ekvivalenciája. A Frobenius-norma. Hatványsorok értelmezése mátrixokra. Ha  $p, r \in \mathbb{R}[x]$ ,  $m_A$  az  $A$  minimálpolinomja, és az  $f$  hatványsor részletösszegei ( $\text{mod } p$ ) együtthatónként  $r$ -hez tartanak, akkor  $f(A) = r(A)$ .
2. Hermite interpolációs feladata: a megoldás unicitása, egzisztenciája, mátrixos előállítása (a mátrixot nem kell felírni, annyi kell, hogy van megfelelő mátrix).
3. Ha  $k_A$  az  $A$  karakterisztikus polinomja és  $r$  az  $f$  hatványsor egy alkalmas Hermite-interpolánsa, akkor  $f$  részletösszegei ( $\text{mod } k_A$ ) együtthatónként  $r$ -hez tartanak, ebből  $f(A)$  kiszámolása.