BME TTK Bevezetés az Algebrába - 1 Vizsgakérdések, 2025 ősz (2 oldal)

(A1) Alapok.

1. Ekvivalenciarelációk és osztályokra bontás. Rendezési relációk, jólrendezések jellemzése leszálló sorozatokkal.

(A2) A számelmélet alapjai.

2. Gyűrűk, egységelemes, kommutatív gyűrűk. Nullosztómentesség. Egységek. Az oszthatóság alaptulajdonságai.
3. Legnagyobb és kitüntetett közös osztó, legkisebb, és kitüntetett közös többszörös. Az Euklideszi és kibővített Euklideszi Algoritmus (és a rájuk vonatkozó tételek).
4. Lineáris diofantoszi egyenletek és megoldhatóságuk, az összes megoldás előállítása.
5. Maradékosztály-gyűrűk, lineáris kongruenciák, egyszerűsítésük. Linearis kongruenciák megoldása és a kinai maradéktétel.
6. Felbonthatatlan és prím elemek, ezek $\mathbb{Z}$-ben egybeesnek. A Számelmélet Alaptétele.
7. Az Euler-féle φ függvény definíciója, teljes maradékrendszerek (TMR), redukált maradékrendszerek (RMR) és a transzfomációs tétel.
8. Az Euler-féle φ függvény multiplikativitása.
9. Az Euler-féle φ függvény kiszámítására vonatkozó képletek.
10. Az Euler-Fermat Tétel és a Kis Fermat tétel két alakja.

(B) Komplex Számok.

1. A test fogalma. Komplex számok definiciója, algebrai alakja. Komplex számok összege, szorzata. Az abszolútérték, a konjugálás és alaptulajdonságaik ($z \cdot \overline{z} = |z|^2$ és a konjugálás automorfizmus).
2. Komplex számok trigonometrikus alakja. Trigonometrikus alakban adott komplex számok szorzása, osztása, (egész kitevős) hatványozása, és a gyökvonás.

(C1) Polinomgyűrűk.

1. Polinomgyűrű fogalma. Polinomok összegének, szorzatának foka. Ha az R gyűrű kommutatív, egységelemes, akkor $R[x]$ is kommutatív, egységelemes. Ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is nullósztómentes.
2. A behelyettesítés gyűrű-homomorfizmus. Polinomok osztása és maradékos osztása. $f \in R[x]$-el akkor és csak akkor lehet maradékosan osztani, ha f főegyütthatója invertálható. Ha R nullosztómentes, akkor a maradékos osztás eredménye egyértelmű.
3. Ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, $f \in R[x]$, akkor $f(c) = 0 \Leftrightarrow (x-c)|f$. Ha R még nullosztómentes is, akkor f-nek legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a fokszáma. Viéte-formulák.

(C2) Polinomok gyökei és szimmetrikus polinomok.

4. Harmadfokú egyenletekből a négyzetes tag kiküszöbölése.
5. Cardano-képletek ($ax^3 + bx + c = 0$ alakú egyenletek megoldása $\mathbb{C}$ felett).
6. Lexikografikus rendezés, lemma a sokváltozós polinomok szorzatának főtagjáról.
7. A szimmetrikus polinomok alaptétele.

(D) Polinomok szorzatra bontása.

1. Ha R egységelemes, nullosztómentes gyűrű, akkor $R[x]$ egységei megegyeznek R egységeivel. Gyűrűk és testek feletti polinomok legnagyobb közös osztójának egyértelműsége, létezése.

2. A számelmélet alaptétele test feletti polinomgyűrűkben. Test felett minden elsőfokú polinom irreducibilis, egy másod-, vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha nincs gyöke az alaptestben.
3. A formális derivált és alaptulajdonságai.
4. Többszörös gyökök és deriváltak kapcsolata.
5. Irreducibilis polinomok $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.
6. Rolle tétele egészegyütthatós polinomok racionális gyökeiről. Primitív polinomok. Minden $\mathbb{Q}[x]$-beli polinom előáll egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként, ez az előállítás egyértelmű.
7. Az együtthatónkénti maradékosztály-képzés homomorfizmus $\mathbb{Z}[x]$ és $\mathbb{Z}_m[x]$ között. Primitív polinomok szorzata primitív (Gauss-lemma).
8. Egy $\mathbb{Z}[x]$-beli primitív polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben. $\mathbb{Z}[x]$ és $\mathbb{Q}[x]$ irreducibilis elemeinek leírása.
9. A számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}[x]$-ben.
10. A Schönemann–Eisenstein-kritérium és a fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium.

(E1) Vektorterek, mátrixok.

1. Vektorterek fogalma. Lineáris kombináció. Lineáris függetlenség és jellemzése triviális lineáris kombinációkkal. Generátorrendszer és bázis. Egy B vektorrendszer bázis $\Leftrightarrow$ minimális generátorrendszer $\Leftrightarrow$ maximális független rendszer $\Leftrightarrow$ minden vektor egyértelműen áll elő B elemeinek lineáris kombinációjaként.
2. Alterek. A kicserélési Lemma. K^n altereiben minden bázis azonos méretű, és ezekben az alterekben van bázis. Dimenzió definíciója.
3. Mátrixműveletek, mátrixgyűrűk. Mátrixok rangja és sorrangja. A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának mátrixrangos jellemzése.
4. Mátrixok jobbinverze, balinverze, inverze. Négyzetes mátrixoknak akkor és csak akkor van jobbinverze, ha a mátrix teljes rangú, a jobbinverz egyértelmű és egyben balinverz is. Mátrix inverzének meghatározása a Gauss-Jordan módszerrel (és a módszer helyessége).
5. Véges dimenziós vektorterek közti lineáris leképezések kapcsolata a mátrixszorzással. Az előírhatósági Tétel. Véges dimenziós vektorterek izomorfak alaptestük egy véges direkthatványával.

(E2) Determinánsok.

6. Determináns-függvények fogalma, létezése, egyértelműsége.
7. A determináns kifejtése tetszőleges sora, illetve oszlopa szerint.
8. Négyzetes mátrix transzponáltjának determinánsa. A determinánsok szorzástétele, a szorzástétel bizonyítás nélkül.
9. Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor A sorai lineárisan függetlenek $\Leftrightarrow$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\Leftrightarrow$ A invertálható $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$.

(E3) Alkalmazások.

10. Vandermonde-mátrixok, Lagrange- és Newton-interpoláció.
11. Az elemi sorátalakítások mátrixai. Ha egy négyzetes mátrixot sorcsere nélkül lépcsős alakra lehet hozni, akkor van LU-felbontása.
12. Ferde kifejtés, determinánsos képlet az inverz-mátrixra, Cramer-szabály.
13. A sztenderd skaláris szorzás. Bizonyítás nélkül: a Dimenziótétel. Bizonyítással: egy mátrix sortere és nulltere ortogonális kiegészítők (ez volt az 5. pont az előadáson, az első 4-nek nem kell a bizonyítása).
14. A Pitagorasz-tétel véges dimenziós terekben. Altérre való merőleges vetület létezése, egyértelműsége, módszer az előállítására (a módszer csak vázlatosan). Ellentmondásos lineáris egyenletrendszer közelítő optimális megoldása (vázlatosan).