1. Adjuk meg az alábbi $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorok által kifeszített W altérnek egy ortogonális bázisát a sztenderd skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval! Határozzuk meg a $\underline{v} = (1, 2, 3, 4)$ vektor merőleges vetületét W -re, és adjuk meg a vetület koordinátavektorát a megadott ortogonális bázisban.
$$\underline{v}_1 = (0, 1, 0, -1), \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 0, 1), \quad \underline{v}_3 = (1, 3, 1, -1).$$

2. Mutassuk meg, hogy rögzített méretű (négyzetes) ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.

3. Igazoljuk, hogy ha $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, akkor $|det(Q)| = 1$.

4. Igazoljuk, hogy ha $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, és λ sajátértéke Q-nak, akkor $|\lambda| = 1$.

5. Igazoljuk, hogy ha $a_1, ..., a_n$ tetszőleges pozitív valós számok, akkor
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot \big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra
$$||\underline{u} + \underline{v}||^2 \leq (||\underline{u}|| + ||\underline{v}||)^2.$$

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges E euklideszi térben érvényes a paralellogramma-szabály: ha $\underline{u}, \underline{v} \in E$, akkor
$$||\underline{u} + \underline{v}||^2 + ||\underline{u} - \underline{v}||^2 = 2||\underline{u}||^2 + 2||\underline{v}||^2.$$

---

8. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektortere és $f, g \in V$-re legyen
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$
Keressünk V-ben ortogonális bázist az előző skaláris szorzatra.