

Ezen a feladatlapon  $K$  végig egy tetszőleges testet,  $V$  egy  $K$  feletti véges dimenziós vektorteret,  $n$  pedig egy pozitív egész számot jelöl.

1. A  $\varphi : V \rightarrow V$  lineáris leképezés mátrixa a  $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$  (rendezett) bázisban egyetlen Jordan-

$$\text{blokk: } [\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \text{ Adjuk meg } \varphi \text{ mátrixát } \{\underline{b}_n, \underline{b}_{n-1}, \dots, \underline{b}_1\}\text{-ben.}$$

2. Igazoljuk, hogy minden ( $\mathbb{C}$  feletti) négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.
3. Az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomját  $k_A$ -val, minimálpolinomját  $m_A$ -val jelölve
- Igazoljuk, hogy az  $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  esetben  $A$  és  $B$  akkor és csak akkor hasonlóak, ha  $k_A = k_B$  és  $m_A = m_B$ .
  - Adjunk példát olyan  $n$ -re és  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -re, hogy  $k_A = k_B$  és  $m_A = m_B$ , de  $A$  és  $B$  mégsem hasonlóak.
  - Melyik az a legkisebb  $n$ , melyre van olyan  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , hogy  $k_A = k_B$  és  $m_A = m_B$ , de  $A$  és  $B$  mégsem hasonlóak?
4. Legyen  $A$  komplex elemű mátrix. Adjuk meg  $A$  Jordan-féle normálalakját, ha
- $A$  karakterisztikus polinomja  $(x-1)^6$ , minimálpolinomja  $(x-1)^4$  és az 1-hez tartozó sajátaltér dimenziója 2;
  - karakterisztikus polinomja  $-(x-\lambda)^7$ , minimálpolinomja  $(x-\lambda)^3$  továbbá  $\lambda$  geometriai multiplicitása 3 (több lehetőség van).
5. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja ( $\mathbb{C}$  felett)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
- karakterisztikus polinomja  $-(x-1)^3(x-3)^4$ ;
  - minimálpolinomja  $(x+2)^6$ , és  $-2$  geometriai multiplicitása 2?
7. Hasonlóság erejéig hány olyan  $3 \times 3$ -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?