Bevezetés az Algebrába 2 **7. feladatsor** **2026. 3.30. - 4.13.**

Ezen a feladatlapon K végig egy tetszőleges testet, n pedig egy pozitív egész számot jelöl.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ diagonális mátrix és $p \in K[x]$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy
$$p(A) = \begin{pmatrix} p(a_1) & 0 & \dots \\ 0 & p(a_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & p(a_n) \end{pmatrix}.$$

2. Igazoljuk, hogy az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja minden gyöke egyszeres.

3. Van-e olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melynek 2 sajátértéke, és $A^3 = A$?

4. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ban, melynek az ötödik hatványa az egységmátrix?

5. Határozzuk meg a minimálpolinomját: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Adjuk meg a következő mátrixok minimálpolinoimjait és Jordan-féle normálalakjait $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$