Bevezetés az Algebrába 2 **6. feladatsor** **2026. 3.23. - 3.30.**

1. (Mátrixegyütthatós polinomok esetében a behelyettesítés általában nem szorzattartó.)

   Legyenek $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U(\lambda) = I \cdot \lambda$, $V(\lambda) = B$ (itt tehát $U(\lambda), V(\lambda) \in (\mathbb{R}^{2\times 2})[x]$ mátrixegyütthatós polinomok). Igazoljuk, hogy

$$(U(\lambda)V(\lambda))|_{\lambda=A} \neq (U(\lambda)|_{\lambda=A}) \cdot (V(\lambda)|_{\lambda=A}).$$

2. Legyen K test, $U(x), V(x) \in (K[x])^{n\times n}$ polinom-elemű mátrixok. Igazoljuk, hogy ha végtelen sok $a \in K$-ra $U(a) = V(a)$, akkor $U(x) = V(x)$.

3. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Tegyük fel, hogy $A^+ = A$. Igazoljuk, hogy A spektruma (sajátértékei halmaza) részhalmaza $\{-1, 0, 1\}$-nak, és A minimálpolinomja legfeljebb harmadfokú.

4. Tegyük fel, hogy $A \in K^{n\times n}$ diagonalizálható mátrix. Hány darab olyan diagonális mátrix van, amihez A hasonló?

5. Jellemezzük azokat a mátrixokat, melyek minimálpolinomja elsőfokú.

6. Legyen V a legfeljebb 2026-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere, és legyen $\varphi : V \to V$, $\varphi(p) = x \cdot p'$ (itt p' a p deriváltja). Határozzuk meg φ minimálpolinomját.