Ezen a feladatlapon K végig egy tetszőleges testet, n pozitív egész számot jelöl.

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett és legyenek $||.||_A$ és $||.||_B$ normák V-n. Emlékeztetünk rá, hogy az $||.||_A$ norma ekvivalens $||.||_B$-vel, ha vannak olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ pozitív konstansok, hogy minden $\underline{x} \in V$-re

$$c_1||\underline{x}||_B \leq ||\underline{x}||_A \leq c_2||\underline{x}||_B.$$

1. igazoljuk, hogy a normák ekvivalenciája ekvivalenciareláció.

2. Tegyuk fel, hogy $||.||_A$ és $||.||_B$ ekvivalens normák. Igazoljuk, hogy ha $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots \in V$, $\underline{b} \in V$ olyanok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} ||\underline{a}_n - \underline{b}||_A = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} ||\underline{a}_n - \underline{b}||_B = 0$.

3. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és legyen $p, q \in K[x]$. Igazoljuk, hogy $p(A) = q(A)$ akkor és csak akkor, ha $p \equiv q\ (mod\ m_A)$ (itt m_A az A minimálpolinomját jelöli).

4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adjunk meg egy olyan r polinomot, melyre $\sin(A) = r(A)$ ($r(A)$-t ne számoljuk ki).

5. A p polinom ismeretlen együtthatóira írjunk fel lineáris egyenletrendszereket úgy, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek p-re (az egyenletrendeszereket elég felírni, nem kell megoldani).
   (a) $P(2) = 3,\ p(3) = 4,\ p(4) = 5,$
   (b) $p(2) = 3, p'(3) = 4,\ p''(3) = 5,$
   (c) $p(2) = 3,\ p'(2) = 5,\ p(3) = 8,$
   (d) $p(-1) = 1,\ p'(-1) = 2,\ p(5) = 3,\ p'(5) = 4,$
   (e) $p(3) = 2,\ p'(3) = 4,\ p''(3) = 7,\ p(4) = -1,$
   (f) $p''(3) = 7,\ p(4) = -1.$

---

6. Legyen a G gráf szomszédsági mátrixa A és tegyük fel, hogy A-nak $\underline{x}$ sajátvektora λ sajátértékkel. Mutassuk meg, hogy ha G minden v csúcsára ráírjuk az $\underline{x}$ vektor v-nek megfelelő koordinátáját, majd ezután a csúcsokra írt számokat kicseréljük szomszédjaik összegére, akkor minden csúcsban az eredetileg odaírt szám λ-szorosát kapjuk.

7. Legyen G adott gráf, és legyen H az a gráf, melyet G-ből úgy kapunk, hogy hozzáveszünk egy új izolált csúcsot (az új csúcsot semelyik csúccsal nem kötjük össze). Igazoljuk, hogy H szomszédsági mátrixának sajátértékeit úgy kapjuk G szomszédsági mátrixának sajátértékeből, hogy a 0 multiplicitását 1-el megnöveljük.

8. Legyen a G gráf szomszédsági mátrixa A. Igazoljuk, hogy $tr(A^3)$ épp a G-beli háromszögek számának 6-szorosa.

9. Igazoljuk, hogy ha az n-csúcsú G gráf szomszédsági mátrixának -1 $(n-1)$-szeres, továbbá $n-1$ 1-szeres sajátértéke, akkor G izomorf K_n-el (az n-csúcsú teljes gráffal).