

Ezen a feladatlapon  $n$  pozitív egész számot jelöl.

1. Igazoljuk, hogy ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix mindegyik sajátértékének abszolútértéke nagyobb 0-nál, de kisebb 1-nél, akkor  $(I - A)$  invertálható és  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ .

2. Legyen  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\pi}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ . Léteznek-e az alábbi mátrixok?

Ha igen, számítsuk ki őket, ha nem, indokoljunk.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n$ ,
  - $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ,
  - $\sum_{n=0}^{\infty} B^n$ ,
  - $e^A$ ,
  - $\sin(C)$ ,
  - $\cos(C)$ .
3. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re ha  $AB = BA$ , akkor  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ .
4. Igazoljuk, hogy ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $p \in \mathbb{R}[x]$  osztható  $A$  minimálpolinomjával, akkor  $p(A)$  egy vetítés mátrixa.

**Definíció.** Ebben anyagban minden gráf véges, irányítatlan, hurokélmentes  $G$  szomszédsági mátrixa  $G$  csúcsaival van indexelve, és az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme akkor és csak akkor 1, ha  $G$   $i$ -edik és  $j$ -edik csúcsa össze van kötve.

5. Adjuk meg  $C_4$  (a 4 csúcsú kör) szomszédsági mátrixát.
6. Legyen  $K_n$  az  $n$ -csúcsú teljes,  $E_n$  az  $n$ -csúcsú üres gráf,  $P_3$  a 3 csúcsú út.
- Adjuk meg  $K_n$  szomszédsági mátrixának sajátértékeit (algebrai multiplicitással).
  - Adjuk meg  $E_n$  szomszédsági mátrixának sajátértékeit (algebrai multiplicitással).
  - Adjuk meg  $P_3$  szomszédsági mátrixának sajátértékeit (algebrai multiplicitással).
7. Igazoljuk, hogy ha  $G$   $d$ -reguláris gráf (azaz minden csúcs foka  $d$ ), akkor szomszédsági mátrixának  $d$  sajátértéke.  
**Útmutatás:** Ezt az  $(1, 1, \dots, 1)$  vektor mutatja (ez a szomszédsági mátrix egyik  $d$ -hez tartozó sajátvektora).
8. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  gráf szomszédsági mátrixa  $A$ , akkor  $A$  sajátértékei négyzetösszege épp  $G$  élei számának duplája:

$$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{tr}(A^2) = 2|E(G)|.$$

9. Legyen a  $G$  gráf szomszédsági mátrixa  $A$ . Igazoljuk, hogy  $G$  akkor és csak akkor páros gráf, ha  $A$  sajátértékei szimmetrikusak a nullára (azaz, ha  $\lambda$  sajátérték, akkor  $-\lambda$  is az).