Bevezetés az Algebrába 2 **11. feladatsor** **2026. 5.4 - 5.11.**

Ezen a feladatlapon n és m pozitív egész számokat jelölnek.

1. Legyenek $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Igazoljuk, hogy
   (a) $(A^H)^H = A$,
   (b) $(A+B)^H = A^H + B^H$,
   (c) $(AB)^H = B^H A^H$.
2. Alakítsuk négyzetösszeggé (azaz adjuk meg a kanonikus alakját):
   (a) $p(x,y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$ (adjuk meg az ortogonális diagonalizáló mátrixot is),
   (b) $q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$,
   (c) $r(x,y,z) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2$.
3. Legyen $q(x,y) = x^2+2kxy+y^2$. Határozzuk meg a k paraméter azon értékeit, melyekre a $q(x,y) = 1$ egyenlet ellipszist, hiperbolát, illetve párhuzamos egyenespárt ír le.
4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. A c paraméter mely értékeire lesz A pozitív definit?
5. Igazoljuk, hogy egy pozitív definit és egy pozitív szemidefinit mátrix összege pozitív definit.
6. Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ szinguláris értékeit.
7. Adjuk meg az alábbi mátrixok SVD (szinguláris értékek szerinti) felbontását.
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
8. Igaz-e, hogy ha egy valós négyzetes mátrix mindegyik szinguláris értéke 1, akkor A ortogonális?
9. Legyen $A = U\Sigma V^T$ SVD-felbontás. Igazoljuk, hogy minden $\underline{x}$-re $||A\underline{x}|| = ||\Sigma V^T \underline{x}||$.
10. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix SVD-felbontása $A = U\Sigma V^T$ és legnagyobb szinguláris értéke σ_1. Igazoljuk, hogy ha $\underline{u}$ tetszőleges egységvektor, akkor $||A\underline{u}|| \le \sigma_1$. Mikor van egyenlőség?