

1. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektortere és $f, g \in V$ -re legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Keressünk V -ben ortogonális bázist az előző skaláris szorzatra.

2. Legyen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, és legyen V az, mint ami az előző feladatban.

- 1 Adjunk meg egy $p \in V$ polinomot, melyre $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$.
- 2 Adjunk meg egy $p \in V$ polinomot, melyre $p(-1) = f(-1)$, $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$.
- 3 Adjunk meg egy $p \in V$ polinomot, melyre az

$$\underline{a} = \left(p(-1), p\left(\frac{-1}{2}\right), p\left(\frac{1}{2}\right), p(1) \right) \text{ és } \underline{b} = \left(f(-1), f\left(\frac{-1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1) \right)$$

vektorok a lehető legközelebb vannak egymáshoz.

- 4 Adjuk meg azt a $p \in V$ polinomot, melyre az előző feladatban szereplő skaláris szorzat által indukált normával $\|f - p\|$ minimális.

3. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Mutassuk meg, hogy A és B ortogonálisan hasonló.
- (b) Határozzunk meg egy ortogonális átkonjugáló mátrixot.
- (c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját (akár több módon is).

4. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Adjunk meg egy ortogonális Q mátrixot, melyre $Q^T A Q$ diagonális.
- (b) Adjunk meg egy ortogonális Q mátrixot, melyre $Q^T B Q$ diagonális.

5. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen f az a bilineáris függvény, melynek A a Gram-mátrixa. Igazoljuk, hogy ha A pozitív definit, akkor főátlójának minden eleme pozitív.

6. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrixok, hogy az a bilineáris függvény, melynek Gram-mátrixa $A - B$ pozitív definit. Igazoljuk, hogy $\text{tr}(A) > \text{tr}(B)$.

7. Igazoljuk, hogy az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalizálható, de ortogonálisan nem diagonalizálható.