

POLINOMOK

- Adjuk meg az összes olyan $a \in \mathbb{Z}$ számot, melyre az $x^3 - ax + 2$ polinomnak van racionális gyöke.
- Bontsuk fel a $12x^3 - 6x^2 + 24$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}[x]$ -ben.
- Irreducibilis-e $\mathbb{Z}[x]$ -ben az $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 9x + 6$ polinom?

PERMUTÁCIÓK

Jelölés: adott $n \in \mathbb{N}$ -re $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ az első n darab pozitív egész számból álló halmaz.

- Hány permutációja van $[2025]$ -nek, illetve adott $n \in \mathbb{N}$ -re $[n]$ -nek?
- Hány darab olyan permutációja van $[8]$ -nak, melyben
 - nincs inverzió;
 - pontosan 1 inverzió van.
- Adott $n \in \mathbb{N}$ -re legfeljebb hány inverzió lehet $[n]$ permutációiban?

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

- Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, melyben az együtthatók \mathbb{R} -beliek, a megoldást is \mathbb{R} -ben keressük, és
 - 5 egyenlet, 6 ismeretlen van és egyetlen megoldása van;
 - 6 egyenlet, 5 ismeretlen van és egyetlen megoldása van;
 - 5 egyenlet, 6 ismeretlen van és nincs megoldása;
 - 5 egyenlet, 5 ismeretlen van és pontosan 5 megoldása van;
 - 5 egyenlet, 5 ismeretlen van és pontosan 5 megoldása van, az együtthatók \mathbb{Z}_5 beliek, és a megoldást is \mathbb{Z}_5 -ben keressük?
- Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert \mathbb{Z}_5 -ben.

$$\begin{array}{rcl} \text{a) } x+ & 2y+ & z = 4 \\ & x+ & 3y+ & 4z = 3 \\ & 2x- & y+ & 5z = 1 \\ & & y+ & 7z = 3 \end{array}$$

- Oldjuk meg egyszerre a következő lineáris egyenletrendszereket (\mathbb{R} -ben).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x- & y+ & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 2 \\ x- & 2y- & z = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x- & y+ & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 2 \\ x- & 2y- & z = 0 \end{array} \right.$$

Mit jelent a megoldás a sorok és az oszlopok szerint nézve?

- Mi az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ síkok metszete? Írjuk le paraméteresen és vektoriálisan is!
- Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek (\mathbb{R} -ben)?

$$\begin{array}{rcl} x+ & y & = 1 \\ x+ & 2y- & az = b \\ x+ & 3y+ & az = 0 \end{array}$$

12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges K testre, $f \in K[x]$ -ra és $a, b \in K, a \neq 0$ -ra f akkor és csak akkor irreducibilis, ha $f(ax + b)$ irreducibilis.

13. Bontsuk fel az alábbi polinomokat irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}[x]$ -ben.

(a) $x^4 + 4$,

(b) $x^4 + 1$,

(c) $x^4 - 14x^2 + 9$,

(d) $3x^7 + 6x - 18$.

14. Az alábbiak közül melyek vannak (redukált) sorlépcsős alakban? Írjuk fel a megfelelő egyenletrendszerek megoldásait (paraméteres és vektoros alakban is)!

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

15. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert!

$$7x + 14y - 21z = 7$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

$$5x + 10y + 15z = 1$$

$$3x + 6y - 9z = 3$$

El lehet-e hagyni néhány egyenletet úgy, hogy ekvivalens rendszert kapjunk? Ha igen, melyikeket?

16. Mi a $2x - y + z = 1$ sík paraméteres egyenlete? A megoldást írjuk le vektoriálisan is!