

1. Adjuk meg \mathbb{Z}_2 felett az összes másodfokú irreducibilis polinomot.
2. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak (\mathbb{Q} -ban).
3. Van-e többszörös gyöke \mathbb{Z}_3 -ban az $x^3 + 1$ polinomnak?
4. Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját:
 - (a) $x^3 - 1$,
 - (b) $x^n + 1$ (ezt oldjuk meg két módon is).
5. Bontsuk fel az $2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben, $\mathbb{C}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben.

Definíció. Az n . körosztási polinom $\Phi_n(x) = \prod_{j=1}^{\varphi(n)} (x - \varepsilon_j)$, ahol $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ a primitív n . egységgyökök.

6. Igazoljuk, hogy

- (a) $x^{n-1} = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$,
- (b) $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (azaz $\Phi_n(x)$ együtthatói egész számok).

7. Bontsuk fel a Φ_{12} körosztási polinomot irreducibilis tényezők szorzatára \mathbb{R} felett.
-

8. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit és bontsuk fel a polinomokat irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben:

- (a) $2x^3 - 7x^2 + 2$,
- (b) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$,
- (c) $x^5 + 1$.