

1. Legyen $p \in \mathbb{N}$ prímszám.
 - (a) Igazoljuk, hogy \mathbb{Z}_p -ben érvényes az $(x + y)^p = x^p + y^p$ azonosság.
 - (b) Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $f(x) = x^p$ függvény automorfizmusa \mathbb{Z}_p -nek.
2. Osszuk el maradékosan az $x^4 - 2x + 5$ polinomot
 - (a) $x^2 - x + 2$ -vel,
 - (b) $(x + 1)$ -gyel,
 - (c) $(x + 1)^2$ -nel!
 - (d) $(x^2 - 1)$ -gyel!
3. Horner-módszer alkalmazásával írjuk fel az $x^3 + 2x^2 + 1$ polinomot $(x - 3)$ hatványai szerint rendezve!
4. A Cardano-képlet segítségével adjuk meg az összes komplex megoldást: $x^3 + 27x - 54i = 0$.
5. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^5 - 5x^3 + 7x^2 - 8$ és a $g(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ polinomokra teljesülnek a következők:
 - (a) f összes (komplex) gyökeinek összege ugyanannyi, mint g összes (komplex) gyökeinek összege. Mennyi ez a közös érték?
 - (b) f összes (komplex) gyökeinek szorzata pontosan 8-szorosa g összes (komplex) gyökei szorzatának.
 - (c) Képezzük f összes (komplex) gyökeiből az összes 3-elemű részhalmazt, e részhalmazok elemeit szorozzuk össze, és legyen t az összes ilyen szorzat összege. Mutassuk meg, hogy $t \in \mathbb{Z}$ (azaz t egész szám).
6. Döntsük el, hogy az alábbi többváltozós polinomok közül melyek szimmetrikusak:

$$x^3 + y^3 - 5xy, \quad x^2y^3, \quad x^4y^4z^4 + xy + yz + xz - 3(x + y + z).$$

-
7. Legyen $p \in \mathbb{N}$ prímszám és legyen $A = \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon \text{ van olyan } k \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \varepsilon \text{ } p^k\text{-odik egységgyök}\}$.
 - (a) Mutassuk meg, hogy A zárt a komplex számok szorzására (azaz a komplex számok multiplikatív csoportjának részcsoportja).
 - (b) Mutassuk meg, hogy ha B az A valódi részhalmaza, amely szorzásra zárt, akkor B véges (azaz A -nak minden valódi részcsoportja véges).
 8. Ha marad idő, akkor az alábbiak (egy részét) javaslom:
 - (a) Érdemes lehet visszatérni a korábbi gyakorlatokra javasolt, fel nem dolgozott feladatok némelyikére (ha vannak ilyenek).
 - (b) Lehet dolgozni az aktuális heti házi feladatokon a gyakorlat ideje alatt is.