1. Keressünk bázisokat az alábbi A mátrix oszlopterében és nullterében (azaz $\mathcal{O}(A)$-ban és $\mathcal{N}(A)$-ban):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Legyen V a legfeljebb 3-adfokú valós együtthatós polinomok vektortere, és legyen $\varphi : V \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(f) = f(2).$$

   Add meg φ mátrixát (a szokásos bázisokban).

3. Adott $\alpha \in \mathbb{R}$-ra legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a z tengely körüli, (pozitív irányú) α szögű elforgatás.
   (a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^3$ minden, origót fixen hagyó egybevágósága lineáris leképezés, ezért mindegyik f_α is lineáris.
   (b) Legyen A_α az f_α mátrixa a sztenderd bázisban. Adjuk meg A_α-t.
   (c) Ellenőrizzük, hogy tetszőleges α, β-ra $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$. Fogalmazzuk meg szavakban, hogy ez mit jelent.

4. Legyen T az $[a, b]$, $[c, d]$ síkvektorok által kifeszített paralelogramma területe. Igazoljuk elemi geometriai úton (pl. az origóra illeszkedő, $a+c, b+d$ élhosszúságú tengelypárhuzamos téglalap területét vizsgálva), hogy

$$T = \left| \, det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|.$$

5. Legyenek $a = [1, 3, -2]$, $b = [2, 0, -2]$, $c = [3, 3, 1] \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Határozzuk meg az a, b, c vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatát.
   (b) Határozzuk meg a $2a, 4b, 6c$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát. Ehhez gondoljuk meg, hogy az a, b, c vektorok által kifeszített parallelepipedon felbontható 6 darab, páronként egyenlő térfogatú tetraéderre (és ez nem csak a megadott a, b, c vektorokra, hanem tetszőleges 3 térvektorra igaz).

6. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} ln(10) & ln(4) & ln(40) \\ ln(5) & ln(4) & ln(20) \\ ln(2) & 0 & ln(2) \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát.