1. Legyenek $a = [1, 2, 0 - 1]$, $b = [2, 3, 5, -7]$, $c = [4, 7, 5, -9] \in \mathbb{R}^4$.
   (a) Döntsük el, hogy az $\{a, b\}$ vektorrendszer linárisan független-e.
   (b) Elő lehet-e állítani a b vektort az a és $2a$ vektorok lineáris kombinációjaként?
   (c) Döntsük el, hogy az $\{a, b, c\}$ vektorrendszer linárisan független-e.

2. Legyen K egy test, $n \in \mathbb{N}$, és legyenek $U, V \subseteq K^n$ alterei K^n-nek. Igazoljuk, hogy $U \cap V$ és
$$U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$$
szintén alterei K^n-nek.

3. (Ez esetleg a jövőhétre halasztható.) Keressünk bázisokat az alábbi A mátrix oszloptertében és nullterében (azaz $\mathcal{O}(A)$-ban és $\mathcal{N}(A)$-ban):
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Gauss-Jordan eliminációval határozzuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mátrix inverzét.

5. Legyen $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Gondoljuk át, hogy a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixgyűrűben mi a nullelem, és a multiplikatív egységelem, és ezek alapján f hogyan tekinthető $\mathbb{C}^{2\times 2}$ feletti polinomnak.
   (b) Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy $a = 0$, $b^2 + c^2 + d^2 = 1$, akkor az $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix gyöke az f polinomnak[1].

6. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valós mátrixok.
   (b) Ellenőrizzük, hogy $B^2 = 0$ (pedig $B \neq 0$).
   (b) Ellenőrizzük, hogy $AB \neq BA$ (azaz a mátrix-szorzás nem kommutatív művelet még a négyzetes mátrixok esetében sem).
   (c) Ellenőrizzük, hogy $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
   (d) Igazoljuk, hogy minden (tetszőleges test feletti, tetszőleges méretű) négyzetes C mátrixra
$$(C + I)(C - I) = C^2 - I^2.$$

---

7. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

   Az alábbi kifejezések közül melyek értelmesek? Számold ki az értéküket!
   $A+B$, $A+C$, $A+D$, $B+A$, $B+D$, AB, BA, AC, CA, C^TA, CD, DC, A^2, B^2, C^2, D^2.

[1] Megjegyzés: a feladatban szereplő alakú mátrixok a szokásos mátrix-műveletekkel (nem-kommutatív) testet alkotnak, ez a test izomorf a kvaterniók testével. A feladat szerint a 2.-fokú f polinomnak a kvaterniók testében végtelen sok gyöke van, mert az $a = 0$, $b^2 + c^2 + d^2 = 1$ feltétel végtelen sok valós a, b, c, d-re teljesül. Ha f-et alaposabban megnézzük, azt látjuk, hogy a feladat állítása szerint a kvaterniók testében -1-nek (pontosabban $-I_2$-nek) végtelen sok négyzetgyöke van.