Bevezetés az Algebrába 2 **Házi feladatok, 9. adag** **2026. ápr. 20 - ápr. 27.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ és minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$-re legyen $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_A = \underline{x}^T A \underline{y}$. Legyen $\underline{u} = (1, 1)$, $\underline{v} = (1, -1)$.
   (a) Igazold, hogy így skaláris szorzást definiáltunk.
   (b) Mennyi lesz az $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_A$ skaláris szorzatok értéke, és mennyi lesz az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorok hossza ebben az euklideszi térben?
   (c) Adj meg erre a skaláris szorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

2. Igazold, hogy ha $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrix, akkor minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$-re

$$||Q\underline{u} - \underline{v}|| = ||\underline{u} - Q^T \underline{v}||.$$

3. Igazold, hogy tetszőleges pozitív $a, b, c \in \mathbb{R}$-re

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2.$$

   Csak olyan tételekre hivatkozz, amit ebben a félévben bevezetés az Algebrába - 2 -ből tanultunk.