

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóban - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Határozd meg a következő mátrixok Jordan-féle normálalakját:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Hasonlóak-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixok?

3. Mely nilpotens mátrixokból lehet négyzetgyököt vonni? Pontosabban, igazold, hogy ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotens, akkor a következő két állítás ekvivalens:

- (a) van olyan $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $X^2 = A$;
- (b) a $\dim(\text{Ker}(A^k)) - \dim(\text{Ker}(A^{k-1}))$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ sorozatban egyetlen páratlan szám sem fordul elő 1-nél többször.